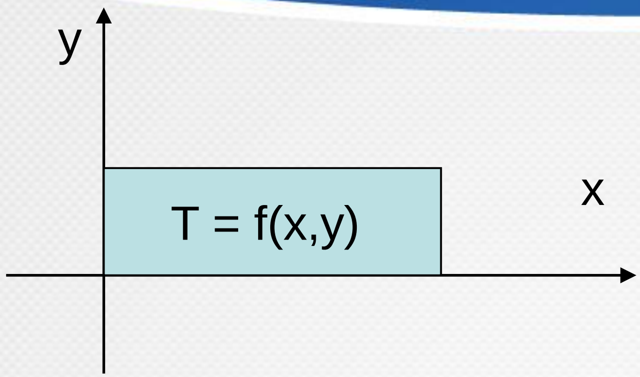
MATEMATIKA 3

Turunan Parsial

-Irma Wulandari-

Pengertian Turunan Parsial



Rata-rata perubahan suhu pelat ΔT *per satuan panjang dalam arah sumbu –x, sejauh* Δx*, untuk koordinat y tetap ;*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Rata-rata perubahan suhu pelat ΔT *per satuan panjang dalam arah sumbu –y, sejauh* Δy*, untuk koordinat x tetap ;*

$$\frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Pengertian Turunan Parsial

Lazimnya perhitungan perubahan suhu per satuan panjang dilakukan di setiap titik (x,y), $\Delta x \to 0$ dan $\Delta y \longrightarrow 0$, jika limitnya ada, maka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad \text{(1a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad \text{(1b)}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ *Menyatakan perubahan suhu per satuan panjang di setiap titik dalam arah x , dan y*

Pengertian Turunan Parsial

$\frac{\partial f}{\partial x}$ *adalah turunan fungsi f(x,y) terhadap x dengan memperlakukan y sebagai suatu tetapan, yang disebut turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap x*

$\frac{\partial f}{\partial y}$ *adalah turunan fungsi f(x,y) terhadap x dengan memperlakukan y sebagai suatu tetapan, yang disebut turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap y*

Lambang lain

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y)$$

Pengertian Turunan Parsial

Turunan parsial (1a) dan (1b) umumnya juga merupakan fungsi dari x dan y, maka jika diturunkan lebih lanjut, disebut turunan parsial kedua.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{yx}$$

Contoh 1

- *Misalkan f(x,y)=xy^2 – sin (xy). Maka ..,*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - y\cos(xy)\right) = y^2 \sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - x\cos(xy)\right) = 2y - \cos xy + xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - y\cos(xy)\right) = 2y - \cos xy + xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x\cos(xy)) = 2x + x^2 \sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Contoh 2

Tinjau pers. Gas ideal PV = nRT, dengan P,V, dan T berturut-turut adalah tekanan, volume dan suhu gas ideal; sedangkan n adalah jumlah mol gas, dan R suatu tetapan fisika, yaitu tetapan gas semesta (universal). Berikut kita akan menganggap n tetap.

Jika kita pecahkan bagi P, diperoleh:

$$P = \frac{nRT}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$$

Jika kita pecahkan bagi V, diperoleh:

$$V = \frac{nRT}{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{P} \qquad \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{nRT}{P^2}$$

Sehingga $$\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial P} = \left(\frac{nR}{V}\right)\left(\frac{P}{nR}\right)\left(-\frac{nRT}{P^2}\right) = -\frac{nRT}{PV} = -1$$

Diferensial Total

Yang lalu : perubahan fungsi $f(x,y)$ terhadap pertambahan salah satu variabelnya, x atau y.

Permasalahan : bagaimanakah perubahan fungsi $f(x,y)$ bila x dan y keduanya bertambah secara bebas ??

Misalkan fungsi $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial di (x,y). Pertambahan fungsi $f(x,y)$ jika x bertambah menjadi $x + \Delta x$, dan y menjadi $y + \Delta y$, adalah

$$\Delta f = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y)$$

Jika ditambahkan dan dikurangkan $f(x, y + \Delta y)$ di ruas kanan, diperoleh :

$$\Delta f = \underbrace{[\, f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]}_{\text{Pertambahan x dalam fungsi } f(x,\, y+\Delta y) \text{ dengan mempertahankan } y+\Delta y \text{ tetap}} + [f(x, y + \Delta y) - f(x,y)] \qquad (*)$$

Diferensial Total

Teorema nilai rata-rata kalkulus

Jika f(x) memiliki turunan f'(x) pada setiap titik dalam selang $[x - \Delta x, x + \Delta x]$*, maka*

$$[f(x+\Delta x)-f(x)] = f'(\xi)\,\Delta x$$

Dengan $\xi = x + \theta\,\Delta x$ $(0 < \theta < 1)$ *sebuah titik dalam selang* $[x - \Delta x, x + \Delta x]$.

Dengan demikian,

$$[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x$$

dengan $0 < \theta_1 < 1$

Dengan cara yang sama, untuk suku kedua pers.(*), menghasilkan

$$[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] = f_y(x, y+\theta_2 \Delta y)\,\Delta y$$

dengan $0 < \theta_2 < 1$

Diferensial Total

Jika turunan parsial $f_x(x,y)$ *dan* $f_y(x,y)$ *kontinu di (x,y), maka*

$$f_x(x + \theta 1\Delta x,\ y + \Delta y) = f_x(x,y) + \varepsilon_1$$

$$f_y(x,\ y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \varepsilon_2$$

dengan $\lim \varepsilon_1 = 0$ *dan* $\lim \varepsilon_2 = 0$, *bila* Δx *dan* Δy *menuju nol.*

Pers.(*) teralihkan menjadi :

$$\Delta f = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

Dengan mengambil limit $\Delta x \to 0$ *dan* $\Delta y \to 0$, *diperoleh turunan total fungsi f(x,y) :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Untuk f(x,y,z,...) , turunan totalnya $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots$

Contoh 3

Hitunglah diferensial total fungsi pada contoh 1

$$f(x,y)=xy^2 – \sin (xy).$$

Jawab.

$f_x = y^2 – y \cos (xy)$ dan $f_y = 2xy - x \cos (xy)$

Sehingga turunan totalnya :

$$df = (y^2 – y \cos (xy))dx + (2xy - x \cos (xy)dy$$

Contoh 4 (1)

Percepatan gravitasi g dapat ditentukan dari panjang l dan periode T bandul matematis ; rumusnya adalah $g = 4\pi^2 l/T^2$. *Tentukanlah kesalahan relatif terbesar dalam perhitungan g jika kesalahan relatif dalam pengukuran l adalah 5 % dan T, 2 %.*

Solusi :

Kesalahan relatif dalam pengukuran l adalah kesalahan sebenarnya dalam pengukuran l dibagi dengan panjang terukur l. Karena kita dapat mengukur l lebih besar atau kecil daripada l sesungguhnya, maka kesalahan relatif terbesar dl/l mungkin -0,05 *atau 0,05. Begitupula* $|dT/T|$ *terbesar adalah 0,02. Bagaimana dengan* $|dg/g|$???

Contoh 4 (2)

$g = 4\pi^2 l/T^2$

$\ln g = \ln(4\pi^2) + \ln l - \ln T^2$

atau $$\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}$$

Menurut ketidaksamaan segitiga :

$$\left|\frac{dg}{g}\right| \leq \left|\frac{dl}{l}\right| + 2\left|\frac{dT}{T}\right|$$

maka, kesalahan relatif terbesar $|dg/g|$ *adalah*

$|dg/g| = 0{,}05 + 2\,(0{,}02) = 0{,}09$

Aturan Berantai (1)

z = f (x,y) : persamaan permukaan S dalam ruang. Jika variabel x dan y berubah sepanjang kurva C sebarang, dengan persamaan parameternya :

x = x (s), dan y = y(s) s sebagai parameter

maka z = f(x(s), y(s)) = z (s)

Sehingga sepanjang kurva C

$$dx = \frac{dx}{ds}\,ds, \qquad dy = \frac{dy}{ds}\,ds, \qquad dz = \frac{dz}{ds}\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

Aturan Berantai (2)

Kasus khusus :

$z = f(x, y)\ ;\ \ y = f(x)\ ;\quad x$ *bebas*

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

Secara umum untuk $n > 2$ *variabel,* $\quad f = f(x, y, z, \ . \ . \ . \ )$

dengan $\quad x = x\,(\,u, v, w, \ . \ . \ . \ )$

$y = y\,(\,u, v, w, \ . \ . \ . \ )$

$z = z\,(\,u, v, w, \ . \ . \ . \ )$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots$$

Aturan Berantai (3)

Karena masing-masing variabel x, y, z, . . . adalah juga fungsi dari u, v, w, . . . , maka :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw + \ldots$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw + \ldots$$

Sehingga, turunan total fungsi f(x,y,z,...) adalah

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \ldots \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \ldots \right) dv + \ldots$$

Contoh 5

Jika $f = x^2 + 2xy - y \ln z$, *dengan* $x = u + v^2$, $y = u - v^2$, *dan* $z = 2u$, *tentukanlah* $\dfrac{\partial f}{\partial u}, dan \dfrac{\partial f}{\partial v}$

Solusi : $$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=(2x + 2y)(1) + (2x - \ln z)(1) + (-y/z)(2)$$

$$= 4x + 2y - \ln z - 2y/z$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= (2x + 2y)(2v) + (2x - \ln z)(-2v) + (-y/z)(0)$$

$$= 4vy + 2v \ln z$$

Fungsi Implisit

Bentuk eksplisit , $y = f(x)$

Bentuk implisit , $\varphi(x, y) = 0$, $dy/dx =$???

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(\partial \varphi / \partial x)}{(\partial \varphi / \partial y)} \quad \textit{asalkan} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$$

Secara geometris, fungsi implisit $\varphi(x, y) = 0$ *menyatakan sebuah kurva pada bidang xy, dan* dy/dx *menyatakan kemiringan garis singgungnya di titik dimana* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$

Contoh 6

Tentukanlah kemiringan garis singgung pada kurva

$x^2 + 2y^2 – 4xy + 7x = 3$ *di titik* $(1, -1)$

Solusi : $\varphi(x, y) = (x^2 + 2y^2 – 4xy + 7x -3) = 0$

Turunan parsial $\varphi(x, y)$ *terhadap* x *dan* y *:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (2x - 4y + 7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (4y - 4x)$$

Kemiringan kurva di titik $(1 , -1)$ *adalah :*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\partial\varphi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial y)} = -\frac{(2x - 4y + 7)}{(4y - 4x)}\Bigg]_{(1,-1)} = 13/8$$

Fungsi Implisit (>2 variabel)

Untuk fungsi implisit dalam tiga atau lebih variabel x, y, z, ...,
yaitu φ(x, y, z, . . .) = 0,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \ldots = 0$$

Jika $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$ *, pemecahan bagi dz :*

$$dz = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \ldots\right)/(\partial\varphi/\partial z)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(\partial\varphi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial z)} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{(\partial\varphi/\partial y)}{(\partial\varphi/\partial z)}$$

Contoh 7

Tentukan dz/dx *dan* dz/dy *dari persamaan* $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Solusi :

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z$$

Dengan demikian :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

Jika $z = 0$*, sepanjang lingkaran* $x^2 + y^2 = 1$*, kedua turunan parsial ini takterdifinisikan.*

PENERAPAN DALAM TERMODINAMIKA (1)

Hukum Pertama Termodinamika

"Jika pada sebuah sistem yang berinteraksi secara termal dengan lingkungan melakukan usaha terhadap lingkungan sebesar δW, maka sistem tersebut akan mengalami pertambahan energi dalam dU, dan menerima atau melepas kalor sebanyak δQ, menurut hubungan $\delta Q = dU + \delta W$"

*δQ dan δW untuk membedakan bahwa pertambahan kalor, dan usaha bergantung pada **jenis proses,** sedangkan dU menyatakan diferensial total energi dalam sistem.*

*Untuk sistem gas, keadaan sistem ditentukan P,V, dan T melalui **pers. Keadaan*** $F(P, V, T) = 0$

Gas ideal : $PV = nRT$ *dan umumnya* $U(T, V)$, *sedangkan* $\delta W = P\,dV$

PENERAPAN DALAM TERMODINAMIKA (2)

Hukum Termodinamika Kedua

“Bagi proses irreversibel (terbalikkan), kalor $\delta Q = TdS$, dengan S adalah entropi “

Hukum pertama termodinamika :

$$T\,dS = dU + P\,dV, \quad \text{atau} \quad dU = -\,TdS + P\,dV$$

Tampak bahwa $U = U(S, V)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) dV \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = -T \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) = P$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = -\frac{\partial T}{\partial V} \qquad \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) = \frac{\partial P}{\partial S}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) \qquad -\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Relasi Maxwell besaran-besaran termodinamika

PENERAPAN DALAM TERMODINAMIKA (3)

Dengan cara yang sama, tunjukkan relasi Maxwell berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial V}{\partial S}; \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T}; \qquad \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial V}{\partial T}$$