Graph

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Pengantar

- Teori graph merupakan pokok bahasan yang memiliki banyak penerapan.
- Graph digunakan untuk merepresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungan antar obyek-obyek tersebut.

Definisi

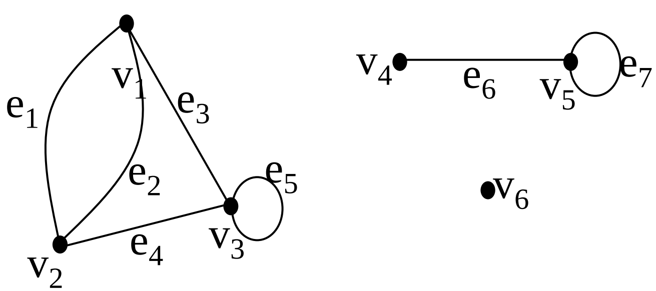
- Graph G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), dimana:
  - V = himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node).
  - E = himpunan garis/sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.

  atau biasa ditulis notasi G = (V,E).
- Simpul pada graph dapat dinomori dengan huruf, seperti v, w, ..., dengan bilangan 1, 2, 3, ..., atau gabungan keduanya. Sedangkan garis yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \ldots$

Definisi

- Graph G didefinisikan sebagai himpunan simpul V(G) dan himpunan garis E(G), dimana tiap simpul berasosiasi dengan himpunan yang berisi satu atau lebih simpul yang disebut **titik ujung**.
- Garis dengan satu titik ujung disebut dengan **loop**.
- Dua garis yang memiliki titik ujung yang sama disebut **garis paralel**.
- Dua simpul yang dihubungkan oleh sebuah garis disebut **adjacent**.
- Satu atau lebih garis berakhir pada satu titik ujung yang disebut **incident**.
- Simpul-simpul yang tidak memiliki garis incident disebut **titik terasing**.
- Graph yang tidak memiliki simpul disebut **graph kosong**.

Definisi



Dari graph di samping dapat dijelaskan sebagai berikut:

- $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$
- Loop adalah e_6 dan e_7.
- Garis paralel adalah e_1 dan e_2, dimana keduanya menghubungkan titik v_1 dengan v_2
- Adjacent terhadap v_1 adalah v_2 dan v_3
- Adjacent terhadap v_4 adalah v_5
- Incident dari e_1 adalah e_2, e_3, e_4
- Incident dari e_2 adalah e_1, e_3, e_4, e_5
- Incident dari e_6 adalah e_7
- Titik terasing adalah v_6

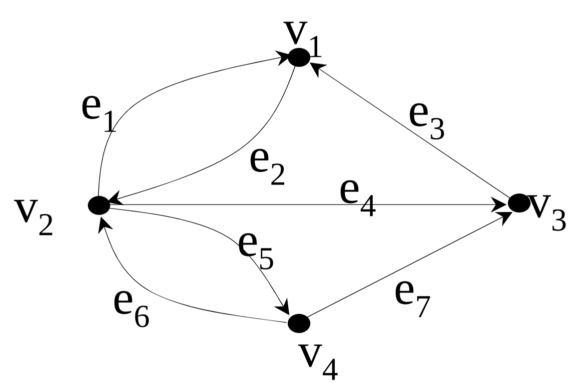
Graph Tidak Berarah

Menurut jenis garis-garisnya, graph dibedakan menjadi dua jenis, yaitu graph berarah dan graph tidak berarah.

- **Graph tidak berarah** adalah graph yang garis-garisnya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graph tidak berarah urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Sehingga $(v_i , v_j) = (v_j , v_i)$ adalah sisi yang sama.

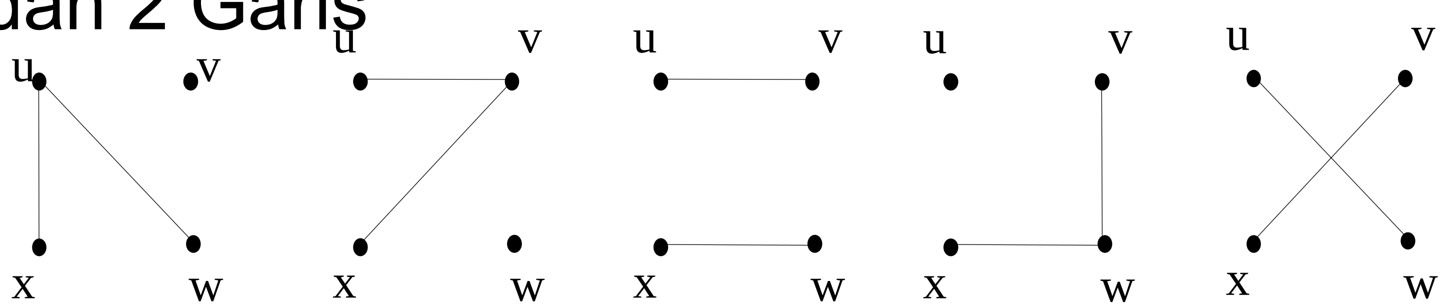
Graph Berarah

– **Graph berarah** adalah graph yang setiap garisnya diberikan orientasi arah. Pada graph berarah (v_j , v_k) dan (v_k , v_j) menyatakan dua buah garis yang berbeda. Atau dapat dikatakan $(v_j , v_k) \neq (v_k , v_j)$. Untuk garis (v_j , v_k), simpul v_j dinamakan simpul asal (initial vertex) dan simpul v_k dinamakan simpul terminal (terminal vertex).



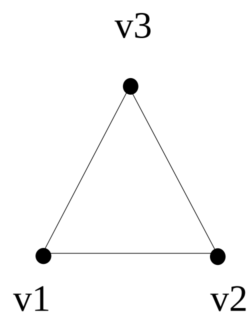
Graph Sederhana

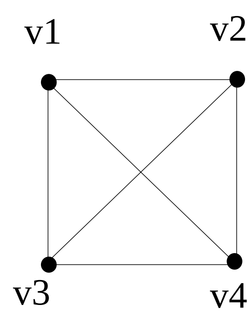
- **Graph Sederhana** adalah graph yang tidak memiliki loops atau garis paralel.
  - Contoh Graph Sederhana dengan 4 Simpul dan 2 Garis

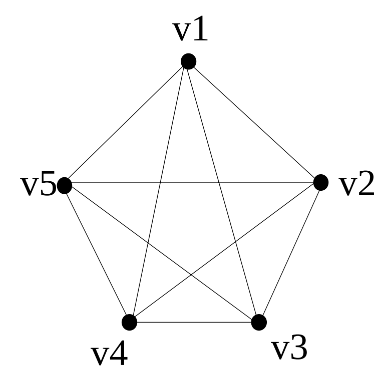


Graph Lengkap pada n verteks

- Graph dengan n simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yang mempunyai himpunan garis yang berisi tepat satu garis untuk tiap pasangan simpul yang berbeda.
  - Contoh Graph lengkap untuk jumlah simpul 2, 3, 4, 5



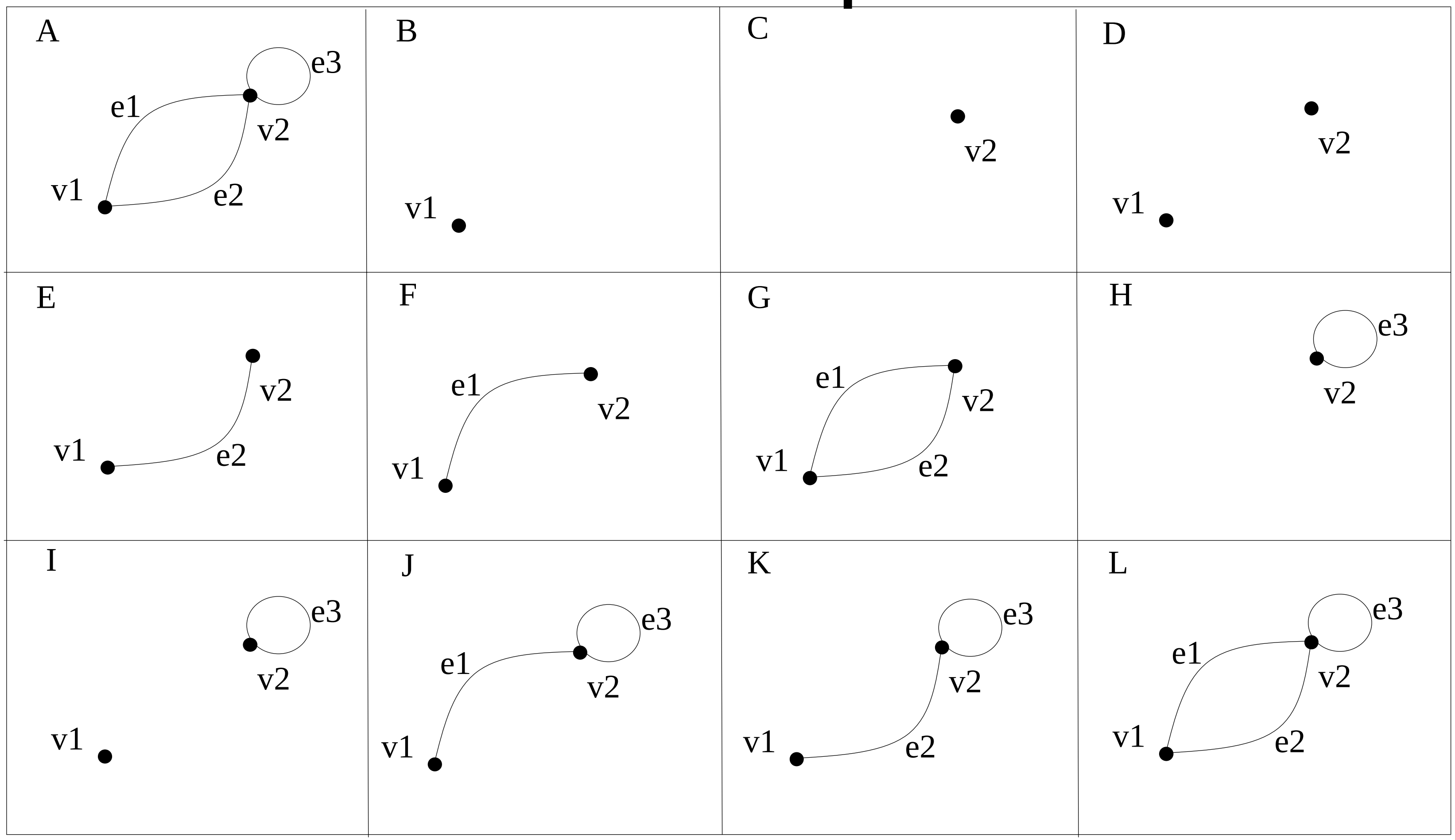




Sub Graph

- Graph H dikatakan merupakan **Sub Graph** dari graph G jika-dan-hanya-jika, setiap simpul dalam H juga merupakan simpul dari G, dan setiap garis dalam H juga merupakan garis dari G, dan setiap garis dalam H mempunyai titik ujung yang sama dengan G.

Sub Graph



Graph Lengkap dan Sub Graph-nya

Konsep Derajat pada Graph

- Derajat dari sebuah simpul adalah jumlah garis yang menjadi incident pada simpul tersebut.
- Misal G adalah Graph dan v adalah simpul dari G. Derajat dari v, dinotasikan **deg(v)** sama dengan jumlah garis yang menjadi incident pada v.
- Total derajat dari G adalah jumlah derajat dari semua simpul pada G.
- Derajat dari sebuah loop adalah 2.

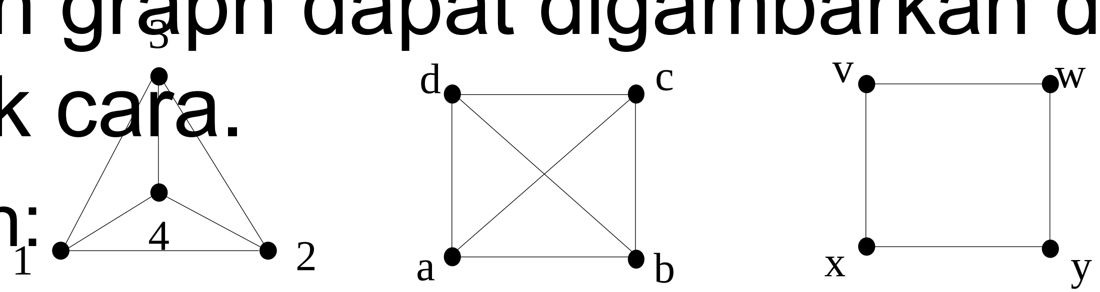
Konsep Derajat pada Graph

- Misal G adalah Graph dan jumlah derajat dari semua simpul dari G sama dengan dua kali jumlah garis dari G.
- Jika simpul dari G dinyatakan sebagai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dimana n adalah integer positif, maka :
  - Total derajat dari G = $deg(v_1) + deg(v_2) + \ldots + deg(v_n)$
    = 2. (jumlah garis pada G)

Graph Isomorfik

- Dua buah graph yang isomorfik adalah dua buah graph yang sama, kecuali penamaan simpul dan garisnya saja yang berbeda. Hal ini dibenarkan karena sebuah graph dapat digambarkan dalam banyak cara.

Contoh:



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

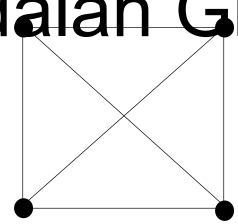
G_1 isomorfik dengan G_2, sedang G_1 tidak isomorfik dengan G_3

Graph Planar dan Graph Bidang

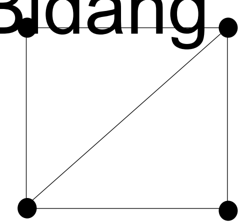
- Graph planar adalah graph yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong.
- Suatu graph kemungkinan merupakan graph planar meskipun graph ini digambarkan dengan garis-garis yang saling berpotongan, karena graph tersebut dapat digambarkan dengan cara berbeda yang garis-garisnya tidak saling berpotongan.

Graph Planar dan Graph Bidang

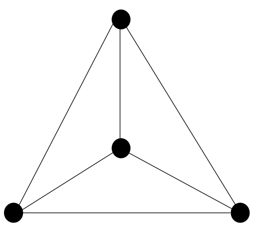
- Graph planar yang digambarkan dengan garis-garis yang tidak saling berpotongan disebut graph bidang (plane graph).
  - Contoh tiga buah Graph Planar. Graph b dan c adalah Graph Bidang.



a



b

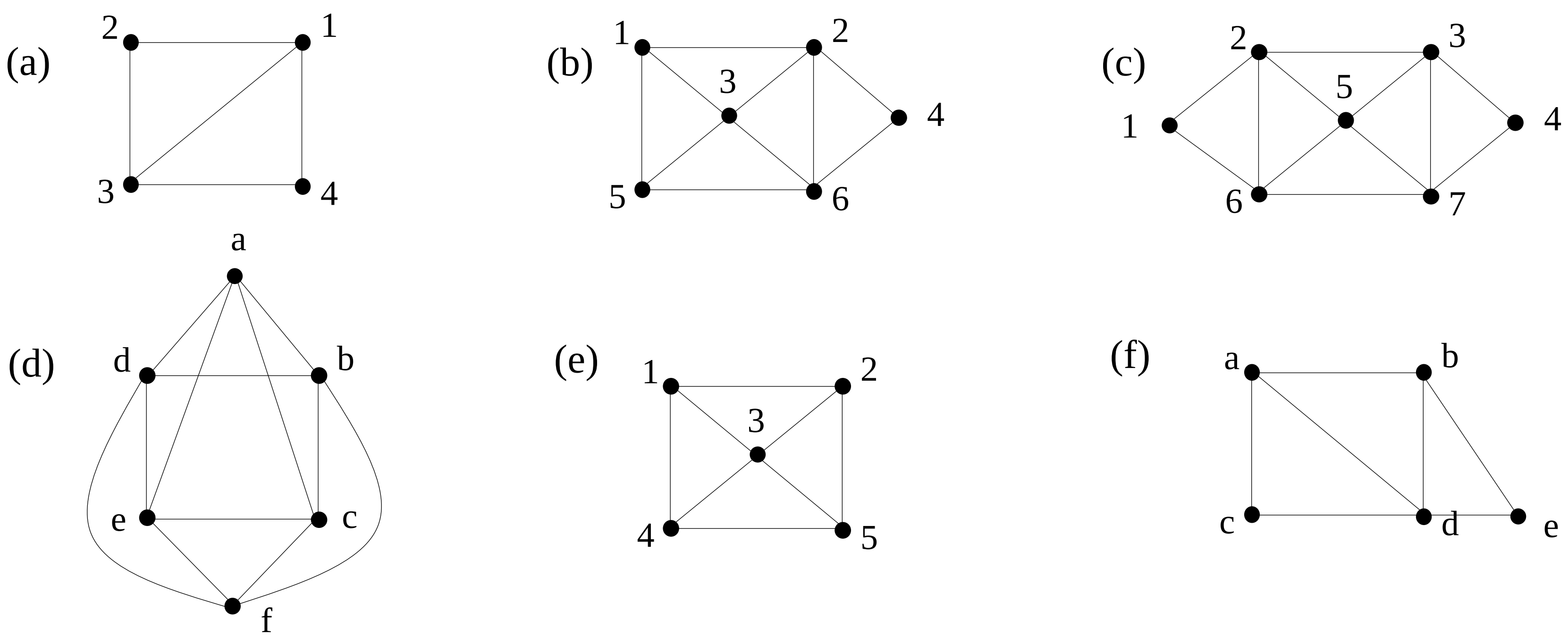


c

Lintasan dan Sirkuit Euler

- **Lintasan Euler** adalah lintasan yang melalui masing-masing garis di dalam graph tepat satu kali.
- Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan **sirkuit Euler**. Jadi, sirkuit Euler adalah sirkuit yang melewati masing-masing garis tepat satu kali.
- Graph yang mempunyai sirkuit Euler disebut graph Euler (*Eulerian Graph*). Graph yang mempunyai lintasan Euler dinamakan graph semi-Euler (*semi Eulerian graph*).

Lintasan dan Sirkuit Euler



(a) dan (b) Graph yang mempunyai lintasan Euler (graph semi-Euler)

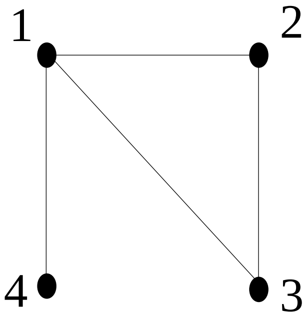
(c) dan (d) Graph yang mempunyai sirkuit Euler (graph Euler)

(e) dan (f) Graph yang tidak memiliki lintasan dan sirkuit Euler

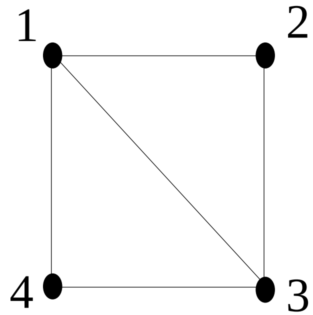
Lintasan dan Sirkuit Hamilton

- Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui tiap simpul dalam graph tepat satu kali.
- Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup tersebut dinamakan sirkuit Hamilton.
- Jadi sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graph tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.
- Graph yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graph Hamilton sedangkan graph yang memiliki lintasan Hamilton dinamakan graph semi-Hamilton.

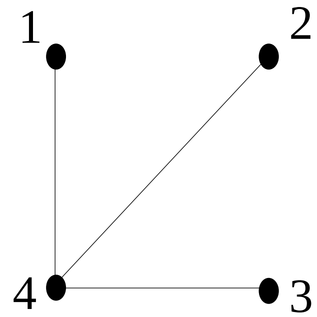
Lintasan dan Sirkuit Hamilton



(a)



(b)



(c)

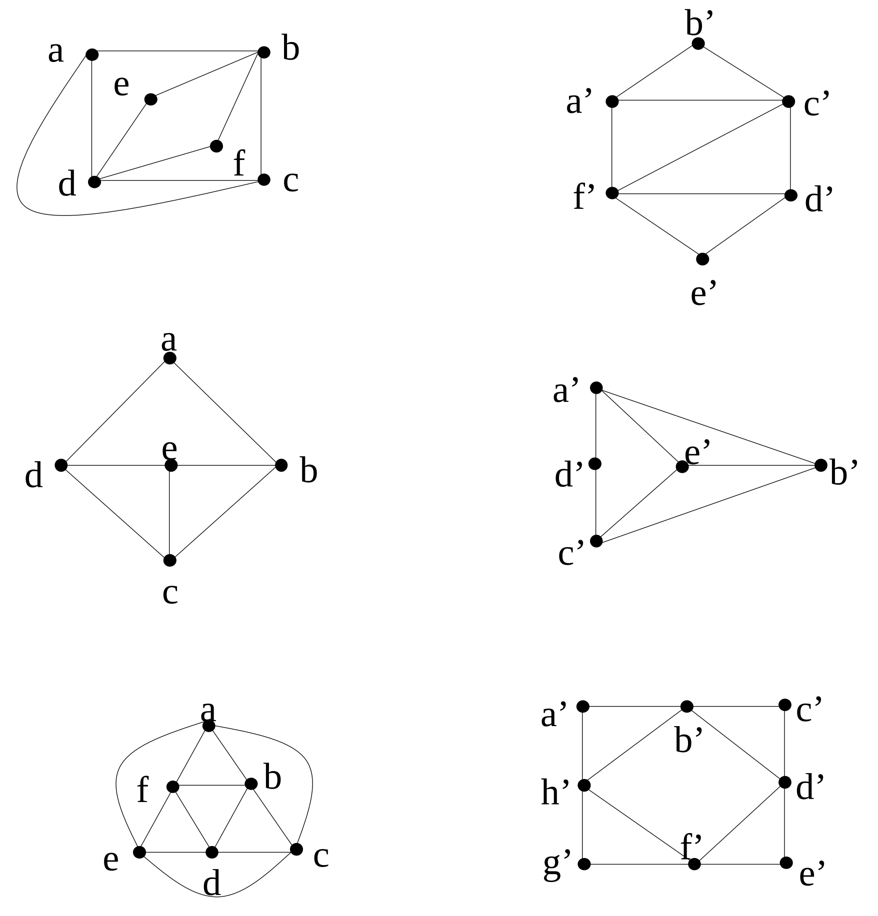
(a) Graph yang memiliki lintasan Hamilton (3,2,1,4)
(b) Graph yang memiliki sirkuit Hamilton (1,2,3,4,1)
(c) Graph yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

Latihan Soal

1. Berapa jumlah simpul yang dimiliki oleh sebuah graph G jika G mempunyai:
   - 16 garis dan semuanya berderajat 2
   - 21 garis, 3 simpul berderajat 4, dan sisanya berderajat 3
   - 24 garis dan semuanya berderajat sama
2. Misalkan G adalah graph dengan 12 garis. Misalkan pula G memiliki 6 titik berderajat 3 dan sisanya berderajat kurang dari 3. Tentukan jumlah minimum titik dalam G !
3. Dalam sebuah pesta, sepuluh orang saling berjabar tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan satu kali dengan orang lainnya. Hitung jumlah jabat tangan yang terjadi (Petunjuk: modelkan persoalan ini ke dalam graph)

Latihan Soal

4. Tunjukkan bahwa derajat maksimum sembarang simpul pada graph sederhana dengan n simpul adalah n-1.
5. Tentukan mana di antara graph berikut ini yang isomorfis



Latihan Soal

6. Gambarkan graph yang mempunyai lintasan Hamilton tetapi tidak mempunyai sirkuit Hamilton.
7. Tentukan sirkuit Euler yang ada pada graph berikut: