Matematika Diskrit

logika

Logika

- Perhatikan argumen di bawah ini:

  Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.

  Apakah kesimpulan dari argumen di atas valid?

  Alat bantu untuk memahami argumen tsb adalah **Logika**

- Banyak teorema dalam Ilmu Komputer/Informatika yang membutuhkan pemahaman logika.

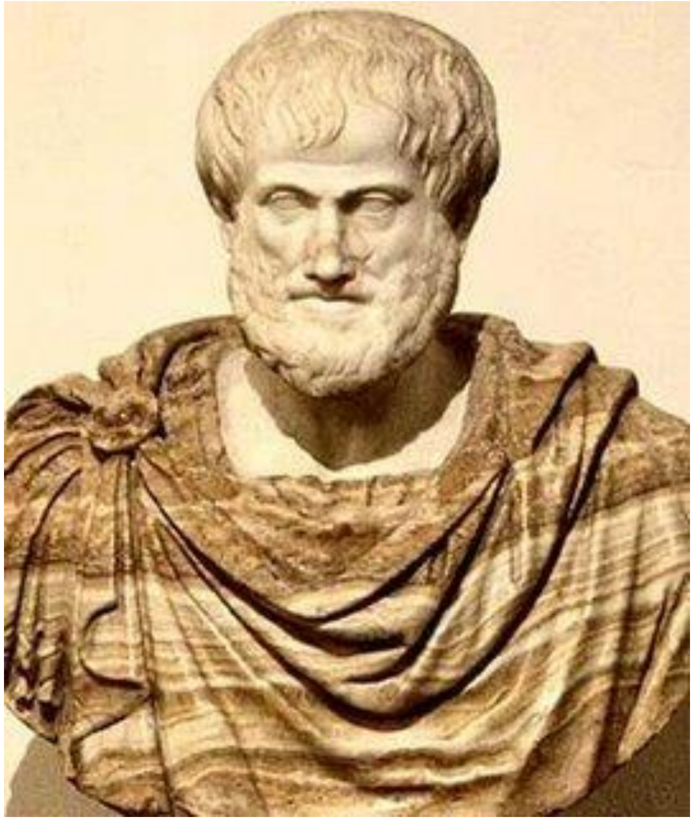
- Contoh:

  1. Syarat cukup graf dengan n simpul mempunyai sirkuit Hamilton adalah derajat tiap simpul $\geq n/2$.

  2. $T(n) = \Theta(f(n))$ jika dan hanya jika $O(f(n)) = \Omega(f(n))$.

- Bahkan, logika adalah jantung dari algoritma dan pemrograman.
- Contoh:

```
if x mod 2 = 0 then
   x:=x + 1
else x:=x - 1
```



Aristoteles, peletak dasar-dasar logika

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).
- Di dalam logika, tidak semua jenis kalimat menjadi obyek tinjauan.

Proposisi

- Pernyataan atau kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

Permainan

"Gajah lebih besar daripada tikus."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? BENAR

Permainan

"520 < 111"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

PERMAINAN

"y > 5"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y, tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.

PERMAINAN

"Sekarang tahun 2003 dan 99 < 5."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

PERMAINAN
"Tolong untuk tidak tidur selama kuliah"

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

PERMAINAN

$\text{“}x < y$ *jika dan hanya jika* $y > x.\text{”}$

Apakah ini pernyataan ? YA

Apakah ini proposisi ? YA

… karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y.

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ? BENAR

Contoh 1. Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 13 adalah bilangan ganjil

(b) Soekarno adalah alumnus UGM.

(c) $1 + 1 = 2$

(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$

(e) Ada monyet di bulan

(f) Hari ini adalah hari Rabu

(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh 2. Semua pernyataan di bawah ini *bukan* proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Isilah gelas tersebut dengan air!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

- Pernyataan yang melibatkan peubah (*variable*) disebut **predikat**, **kalimat terbuka**, atau **fungsi proposisi**

  Contoh: "$x > 3$", "$y = x + 10$"

  Notasi: $P(x)$, misalnya $P(x)$: $x > 3$

- Predikat dengan *quantifier*: $\forall x\ P(x)$

- **Kalkulus proposisi**: bidang logika yang berkaitan dengan proposisi.

- **Kalkulus predikat**: bidang logika yang berkaitan dengan predikatr dan *quantifier*.

- Kembali ke kalkulus proposisi
- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, ….
- Contoh:

  p : 13 adalah bilangan ganjil.

  q : Soekarno adalah alumnus UGM.

  r : $2 + 2 = 4$

Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan p dan q adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q

     Notasi $p \wedge q$,

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q

     Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p

     Notasi: $\sim p$

- p dan q disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition*

Contoh 3. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan

q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan **dan** murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan **atau** murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau: Hari ini *tidak* hujan)

Contoh 4. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

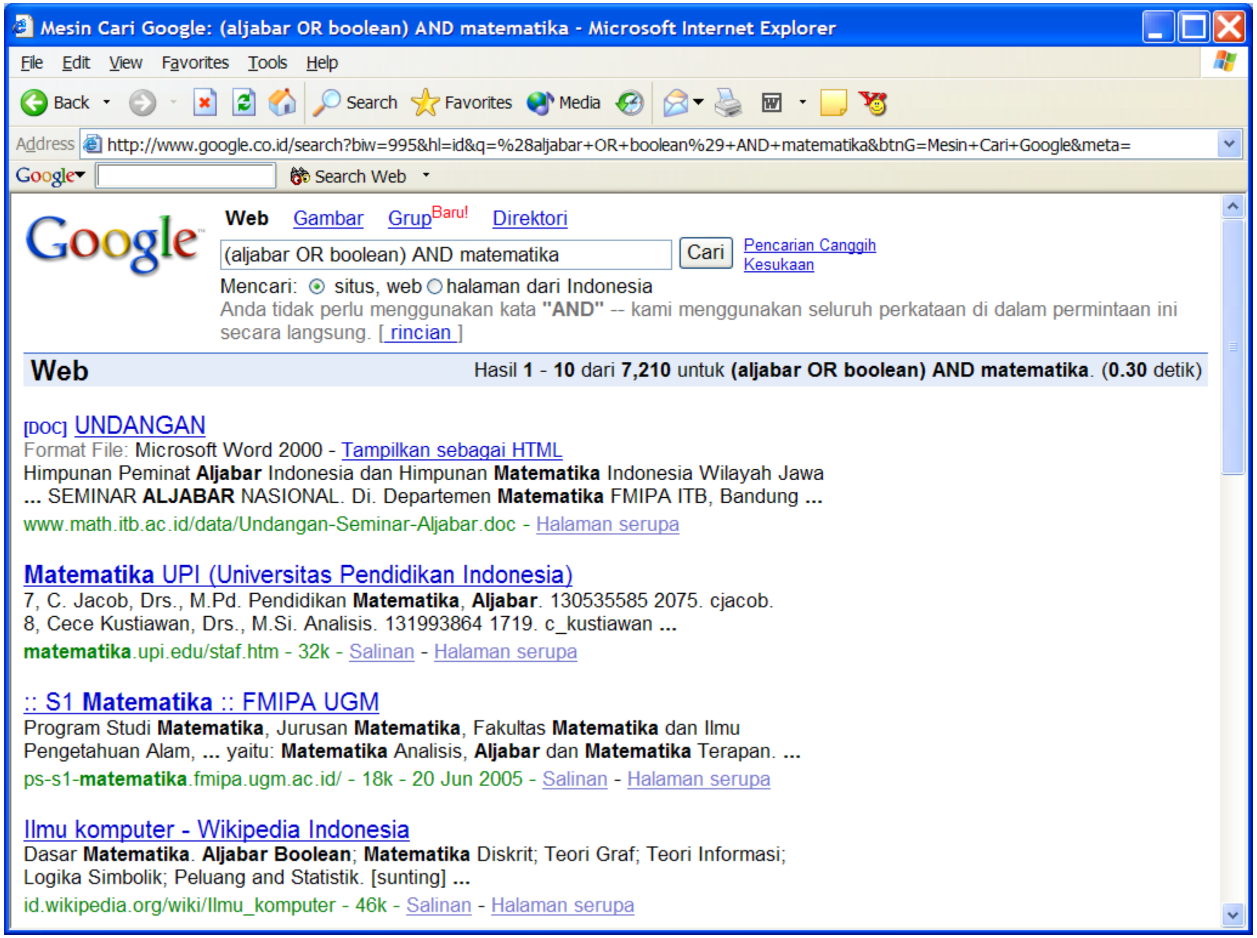
p	$\sim q$
T	F
F	T

Contoh 5. Misalkan

p : 17 adalah bilangan prima (benar)
q : bilangan prima selalu ganjil (salah)

$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil (salah)

- Operator proposisi di dalam *Google*


Mesin Cari Google: (aljabar OR boolean) AND matematika - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Back Search Favorites Media
Address http://www.google.co.id/search?biw=995&hl=id&q=%28aljabar+OR+boolean%29+AND+matematika&btnG=Mesin+Cari+Google&meta=
Google Search Web
Google
Web Gambar Grup Baru! Direktori
(aljabar OR boolean) AND matematika
Cari
Pencarian Canggih
Kesukaan
Mencari: situs, web halaman dari Indonesia
Anda tidak perlu menggunakan kata "AND" -- kami menggunakan seluruh perkataan di dalam permintaan ini secara langsung. [rincian]
Web
Hasil 1 - 10 dari 7,210 untuk (aljabar OR boolean) AND matematika. (0.30 detik)
[DOC] UNDANGAN
Format File: Microsoft Word 2000 - Tampilkan sebagai HTML
Himpunan Peminat Aljabar Indonesia dan Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Jawa ... SEMINAR ALJABAR NASIONAL. Di. Departemen Matematika FMIPA ITB, Bandung ...
www.math.itb.ac.id/data/Undangan-Seminar-Aljabar.doc - Halaman serupa
Matematika UPI (Universitas Pendidikan Indonesia)
7, C. Jacob, Drs., M.Pd. Pendidikan Matematika, Aljabar. 130535585 2075. cjacob. 8, Cece Kustiawan, Drs., M.Si. Analisis. 131993864 1719. c_kustiawan ...
matematika.upi.edu/staf.htm - 32k - Salinan - Halaman serupa
:: S1 Matematika :: FMIPA UGM
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ... yaitu: Matematika Analisis, Aljabar dan Matematika Terapan. ...
ps-s1-matematika.fmipa.ugm.ac.id/ - 18k - 20 Jun 2005 - Salinan - Halaman serupa
Ilmu komputer - Wikipedia Indonesia
Dasar Matematika. Aljabar Boolean; Matematika Diskrit; Teori Graf; Teori Informasi; Logika Simbolik; Peluang and Statistik. [sunting] ...
id.wikipedia.org/wiki/Ilmu_komputer - 46k - Salinan - Halaman serupa

Contoh 5. Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 6. $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh 7. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh 8. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

- **Contoh 9.** Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

<u>Penyelesaian</u>:

$$
\begin{aligned}
p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum distributif)} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum negasi)} \\
&\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh 10. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. Inclusive or

"atau" berarti "p atau q atau keduanya"

Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa C++ atau Java".

2. Exclusive or

"atau" berarti "p atau q tetapi bukan keduanya".

Contoh: "Ia dihukum 5 tahun atau denda 10 juta".

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*

Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Proposisi Bersyarat (kondisional atau implikasi)

- Bentuk proposisi: “jika p, maka q”
- Notasi: $p \to q$

- Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**

- Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh 11.

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah

b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi

c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \to q$:

- Jika p, maka q
- Jika p, q
- p mengakibatkan q (*p implies q*)
- q jika p
- p hanya jika q
- p syarat cukup untuk q (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
- q syarat perlu untuk p (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
- q bilamana p (*q whenever p*)

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).

$\therefore$ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

$\therefore$ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen anda benar.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.

- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

  "Jika 1 + 1 = 2 maka Paris ibukota Perancis"

  "Jika *n* bilangan bulat maka hari ini hujan"

- Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

```
if c then S
```

`c`: ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi
`S`: satu atau lebih pernyataan.

`S` dieksekusi jika `c` benar,
`S` tidak dieksekusi jika `c` salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.

- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$).

- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi `c`, jika `c` benar maka `S` dieksekusi, sebaliknya jika `c` salah maka `S` tidak dieksekusi.

Contoh 12. Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

```
if x > y then y:=x+10;
```

Berapa nilai *y* setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2$, $y = 1$

(ii) $x = 3$, $y = 5$?

Penyelesaian:

(i) `x = 2` dan `y = 1`

Ekspresi `x > y` bernilai benar

Pernyataan `y:=x+10` dilaksanakan

Nilai *y* sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) `x = 3` dan `y = 5`

Ekspresi `x > y` bernilai salah

Pernyataan `y:=x+10` tidak dilakukan

Nilai `y` tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

VARIAN PROPOSISI BERSYARAT

Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 13. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Bikondisional (Bi-implikasi)

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
    (a) p jika dan hanya jika q.
    (b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q.
    (c) Jika p maka q, dan sebaliknya.
    (d) p *iff* q

Contoh 14. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

- Bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi.

Teorema:

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.