Bab 2. Penyelesaian Persamaan Non Linier

Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

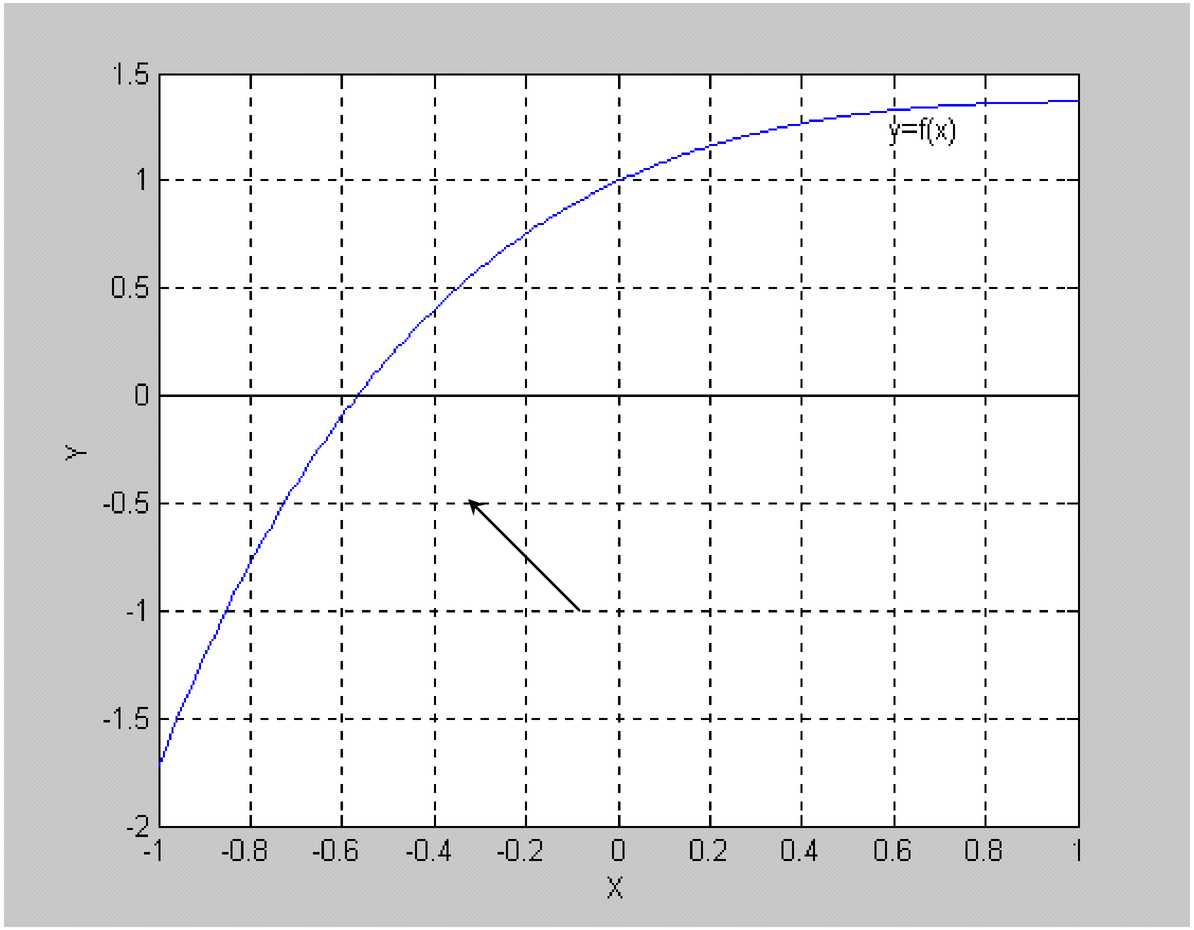
Persamaan Non Linier

- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton-Raphson
- Metode Secant.

Persamaan Non Linier

- penentuan akar-akar persamaan non linier.
- Akar sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol.
- akar persamaan $f(x)$ adalah titik potong antara kurva $f(x)$ dan sumbu X.

Persamaan Non Linier



Persamaan Non Linier

- Penyelesaian persamaan linier *mx + c = 0* dimana *m* dan *c* adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{m}$$

- Penyelesaian persamaan kuadrat ax2 + bx + c = 0 dapat dihitung dengan menggunakan rumus ABC.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Penyelesaian Persamaan Non Linier

- Metode Tertutup
  - Mencari akar pada range [a,b] tertentu
  - Dalam range[a,b] dipastikan terdapat satu akar
  - Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen
- Metode Terbuka
  - Diperlukan tebakan awal
  - x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
  - Hasil dapat konvergen atau divergen

Metode Tertutup

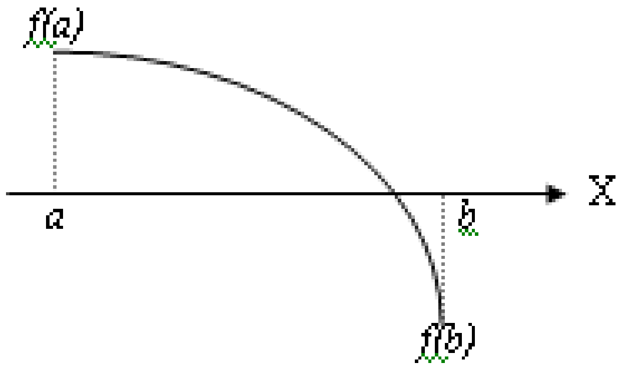
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

Metode Terbuka

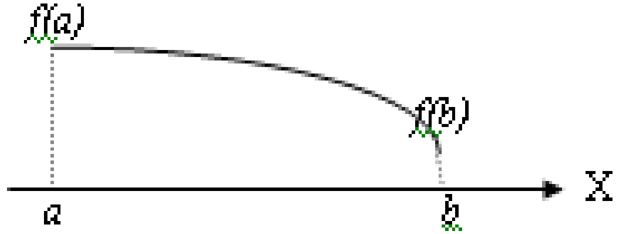
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton-Raphson
- Metode Secant.

Theorema

- Suatu range *x=[a,b]* mempunyai akar bila *f(a) dan f(b)* berlawanan tanda atau memenuhi *f(a).f(b)<0*
- Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena *f(a).f(b)<0* maka pada range x=[a,b] terdapat akar.



Karena *f(a).f(b)>0* maka pada range x=[a,b] tidak dapat dikatakan terdapat akar.

Metode Table

- Metode Table atau pembagian area.
- Dimana untuk x di antara *a* dan *b* dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai *f(x)* sehingga diperoleh tabel :

X	f(x)
$x_0=a$	f(a)
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
……	……
$x_n=b$	f(b)

Metode Tabel

(1) Defisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah} dan batas atas x_{atas}.

(3) Tentukan jumlah pembagian N

(4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$$

(5) Untuk i = 0 s/d N, hitung

$x_i = x_{bawah} + i.h$

$y_i = f(x_i)$

(6) Untuk I = 0 s/d N dicari k dimana

*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1}.

Contoh

- Selesaikan persamaan : $x+e^{x} = 0$ dengan range x = $[-1,0]$
- Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = $[-1,0]$ dibagi menjadi 10 bagian sehingga diperoleh :

X	f(x)
-1,0	-0,63212
-0,9	-0,49343
-0,8	-0,35067
-0,7	-0,20341
-0,6	-0,05119
-0,5	0,10653
-0,4	0,27032
-0,3	0,44082
-0,2	0,61873
-0,1	0,80484
0,0	1,00000

Contoh

- Dari table diperoleh penyelesaian berada di antara –0,6 dan –0,5 dengan nilai f(x) masing-masing -0,0512 dan 0,1065, sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di x=-0,6.
- Bila pada range x = $[-0{,}6, -0{,}5]$

  dibagi 10 maka diperoleh f(x) terdekat dengan nol pada x = -0,57 dengan F(x) = 0,00447

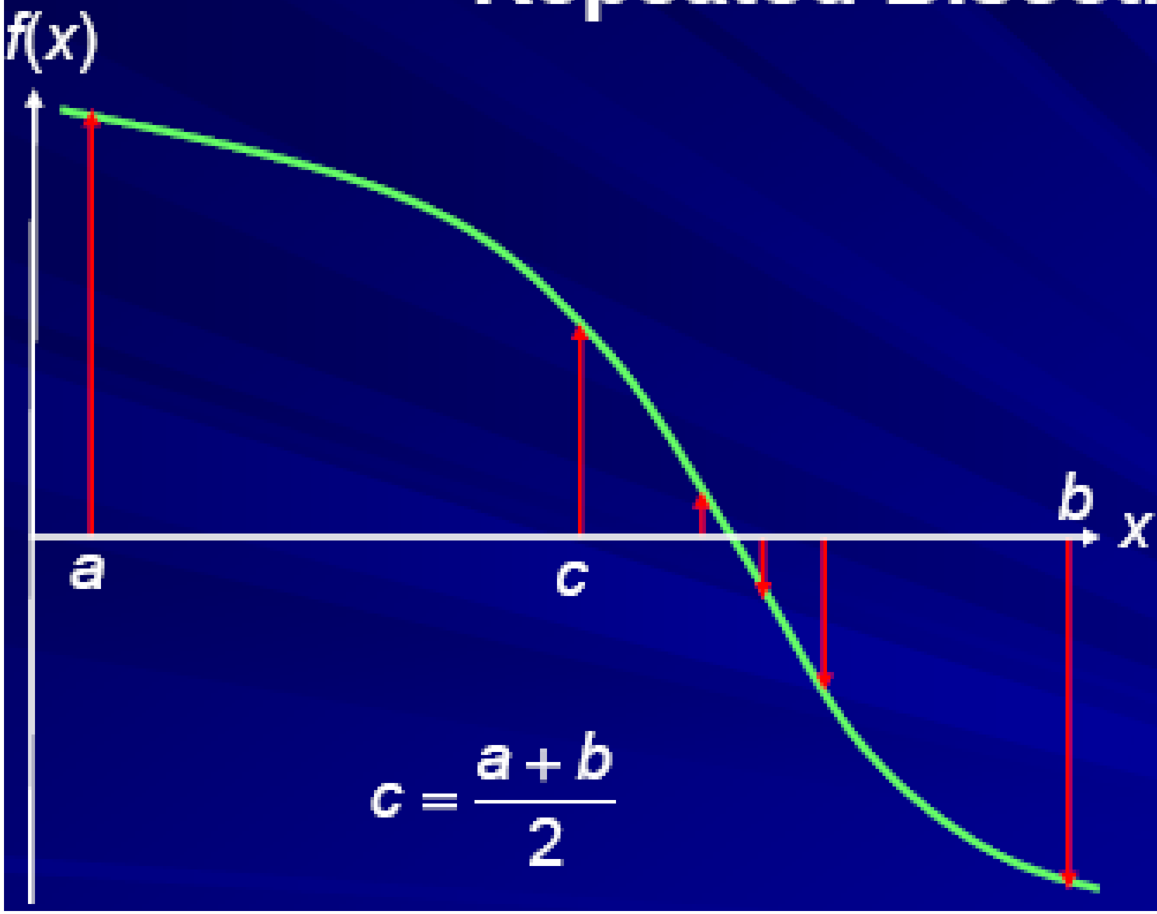
Kelemahan Metode Table

- Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini tidak digunakan dalam penyelesaian persamaan non linier
- Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

Metode Biseksi

- Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi N bagian.
- Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang.Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

Repeated Bisection



$$c = \frac{a+b}{2}$$

If $f(a)$ and $f(b)$ have opposite signs then a root exists between a and b

Bisect the interval a to b, to get a new point c

Metode Biseksi

- Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*).Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

- Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a) \,.\, f(b) < 0$$

- Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

Algoritma Biseksi

Algoritma Metode Biseksi

(1) Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya

(2) Tentukan nilai a dan b

(3) Tentukan torelansi e dan iterasi maksimum N

(4) Hitung $f(a)$ dan $f(b)$

(5) Jika $f(a).f(b)>0$ maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan

(6) Hitung x= $\dfrac{a+b}{2}$

(7) Hitung $f(x)$

(8) Bila $f(x).f(a)<0$ maka b=x dan $f(b)=f(x)$, bila tidak a=x dan $f(a)=f(x)$

(9) Jika |b-a|<e atau iterasi>iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x, dan bila tidak, ulangi langkah 6.

Contoh Soal

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, dengan menggunakan range x=[-1,0], maka diperoleh tabel biseksi sebagai berikut :

iterasi	a	B	x	f(x)	f(a)	Keterangan
1	-1	0	-0,5	0,175639	-1,71828	berlawanan tanda
2	-1	-0,5	-0,75	-0,58775	-1,71828	
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,16765	-0,58775	
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,012782	-0,16765	berlawanan tanda
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,07514	-0,16765	
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,03062	-0,07514	
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,00878	-0,03062	
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	0,002035	-0,00878	berlawanan tanda
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00336	-0,00878	
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00066	-0,00336	

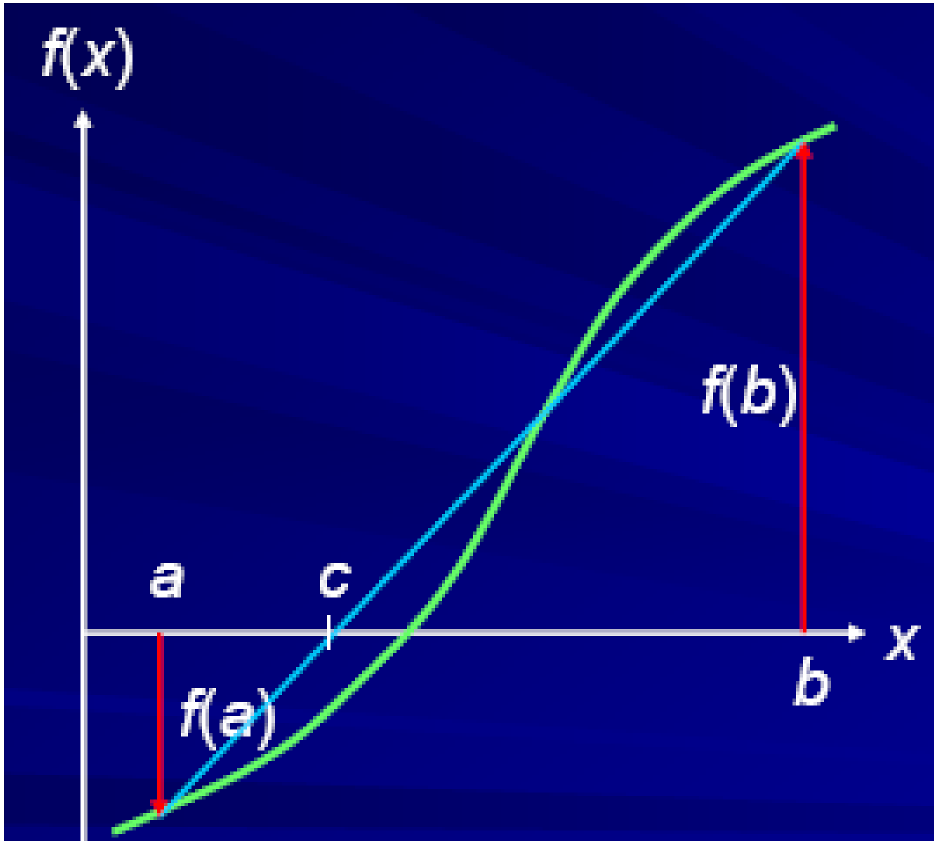
Contoh Soal

- Dimana x = $\frac{a+b}{2}$
  Pada iterasi ke 10 diperoleh x = -0.56738 dan f(x) = -0.00066
- Untuk menghentikan iterasi, dapat dilakukan dengan menggunakan toleransi error atau iterasi maksimum.
- *Catatan :* Dengan menggunakan metode biseksi dengan tolerasi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errorny) maka semakin besar jumlah iterasi yang dibutuhkan.

Metode Regula Falsi

- metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range.
- Dua titik a dan b pada fungsi f(x) digunakan untuk mengestimasi posisi c dari akar interpolasi linier.
- Dikenal dengan metode False Position

Metode Regula Falsi



$$\text{slope} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{0-f(a)}{c-a}$$

$$c-a = -f(a)\times\frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c = a - f(a)\times\frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Metode Regula Falsi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-0}{b-x}$$

$$x=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Algoritma Metode Regula Falsi

1. definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung Fa = f(a) dan Fb = f(b)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau error > e
   - $x = \dfrac{Fb.a - Fa.b}{Fb - Fa}$
   - Hitung Fx = f(x)
   - Hitung error = |Fx|
   - Jika Fx.Fa <0 maka b = x dan Fb = Fx jika tidak a = x dan Fa = Fx.
6. Akar persamaan adalah x.

Contoh Soal

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1=0$ pada range x= [0,-1]

```
a = -1
b = 0
Toleransi = 0.0000001
Maksimum iterasi = 20
1 -1 0 -0.367879 0.468536 -1.71828
2 -1 -0.367879 -0.503314 0.16742 -1.71828
3 -1 -0.503314 -0.547412 0.0536487 -1.71828
4 -1 -0.547412 -0.561115 0.0165754 -1.71828
5 -1 -0.561115 -0.565308 0.0050629 -1.71828
6 -1 -0.565308 -0.566585 0.00154103 -1.71828
7 -1 -0.566585 -0.566974 0.000468553 -1.71828
8 -1 -0.566974 -0.567092 0.000142418 -1.71828
9 -1 -0.567092 -0.567128 4.32841e-005 -1.71828
10 -1 -0.567128 -0.567139 1.31546e-005 -1.71828
```

Contoh Soal

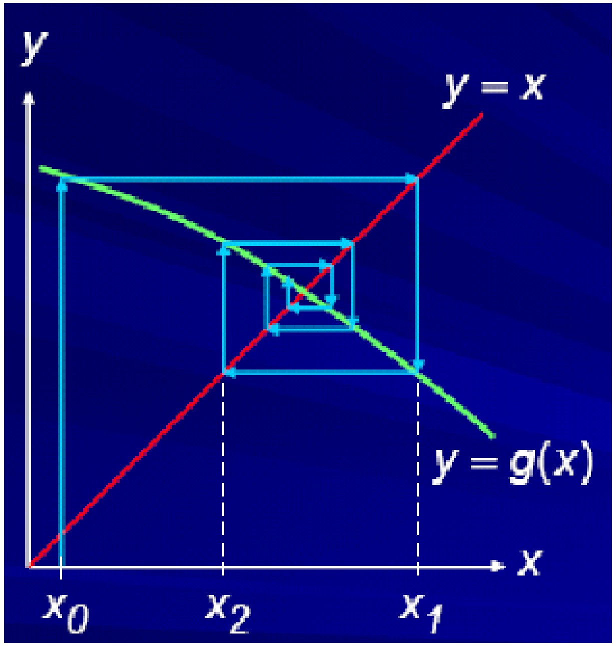
```
11 -1 -0.567139 -0.567142 3.99783e-006 -1.71828
12 -1 -0.567142 -0.567143 1.21498e-006 -1.71828
13 -1 -0.567143 -0.567143 3.69244e-007 -1.71828
14 -1 -0.567143 -0.567143 1.12217e-007 -1.71828
15 -1 -0.567143 -0.567143 3.41038e-008 -1.71828
Akar di x = -0.567143 dengan f(x) = 3.41038e-008
```

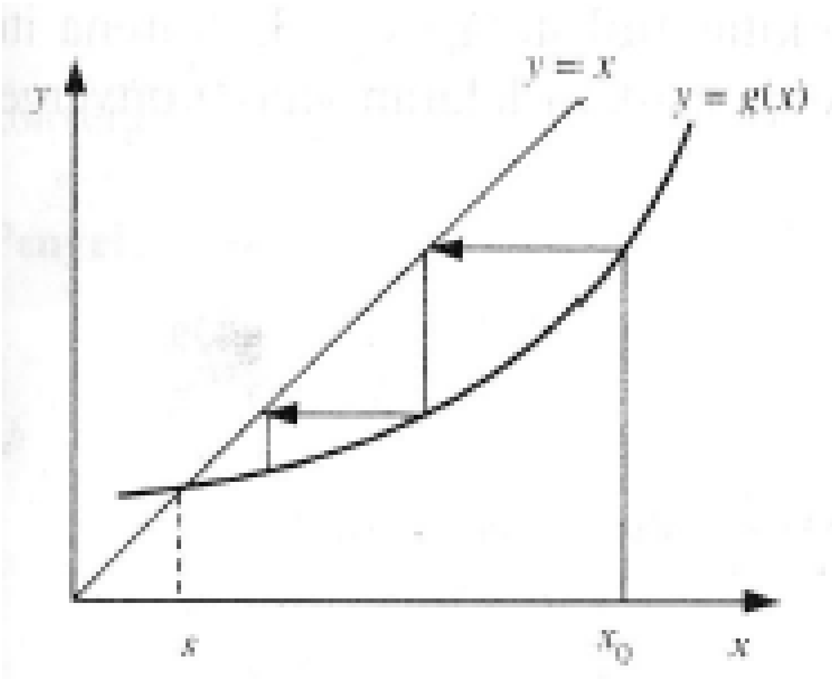
Metode Iterasi Sederhana

- Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : $x = g(x)$.
- Contoh :
  - $x - e^x = 0 \rightarrow$ ubah
  - $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$
- g(x) inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini

Metode Iterasi Sederhana

- Hasil Konvergen





Konvergen Berosilasi

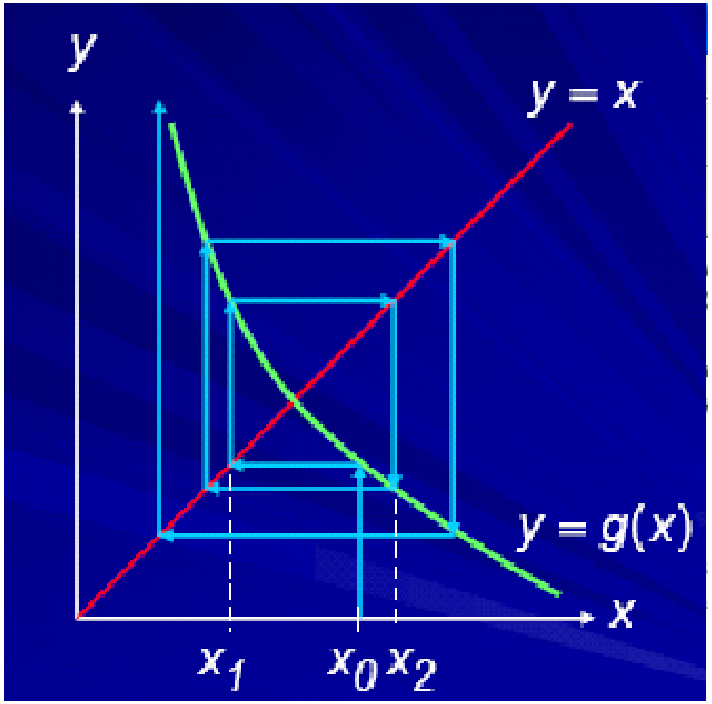
$-1<g'(x)<0$

Konvergen Monoton

$0 <g'(x)<1$

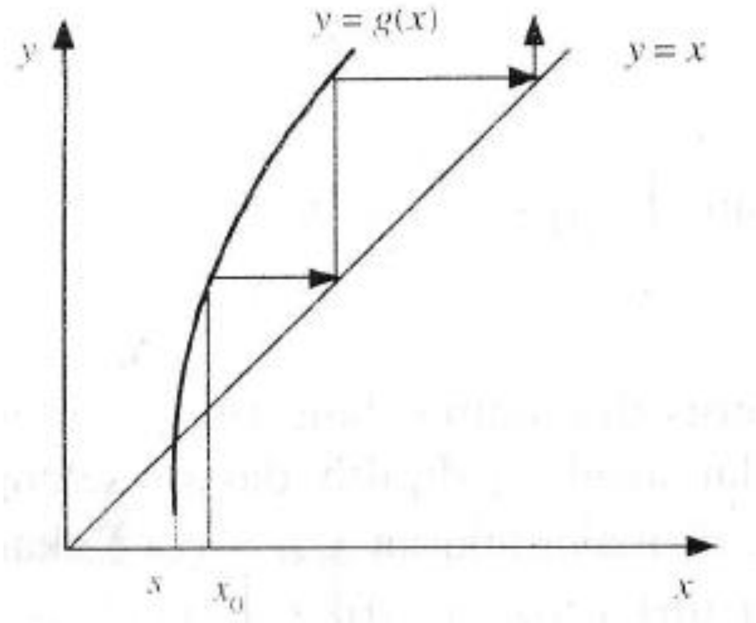
Metode Iterasi Sederhana

- Hasil Divergen



Divergen Berosilasi

g'(x)<-1



Divergen Monoton

g'(x)> 1

Contoh :

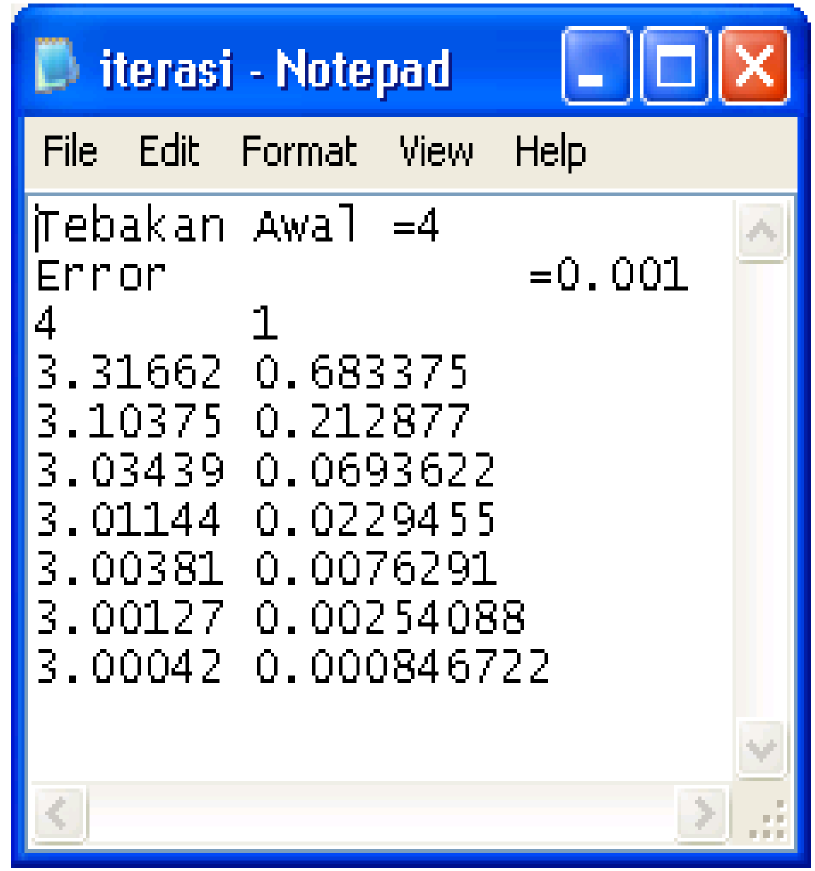
- Carilah akar pers f(x) = x^2-2x-3
- x^2-2x-3 = 0
- X^2 = 2x + 3

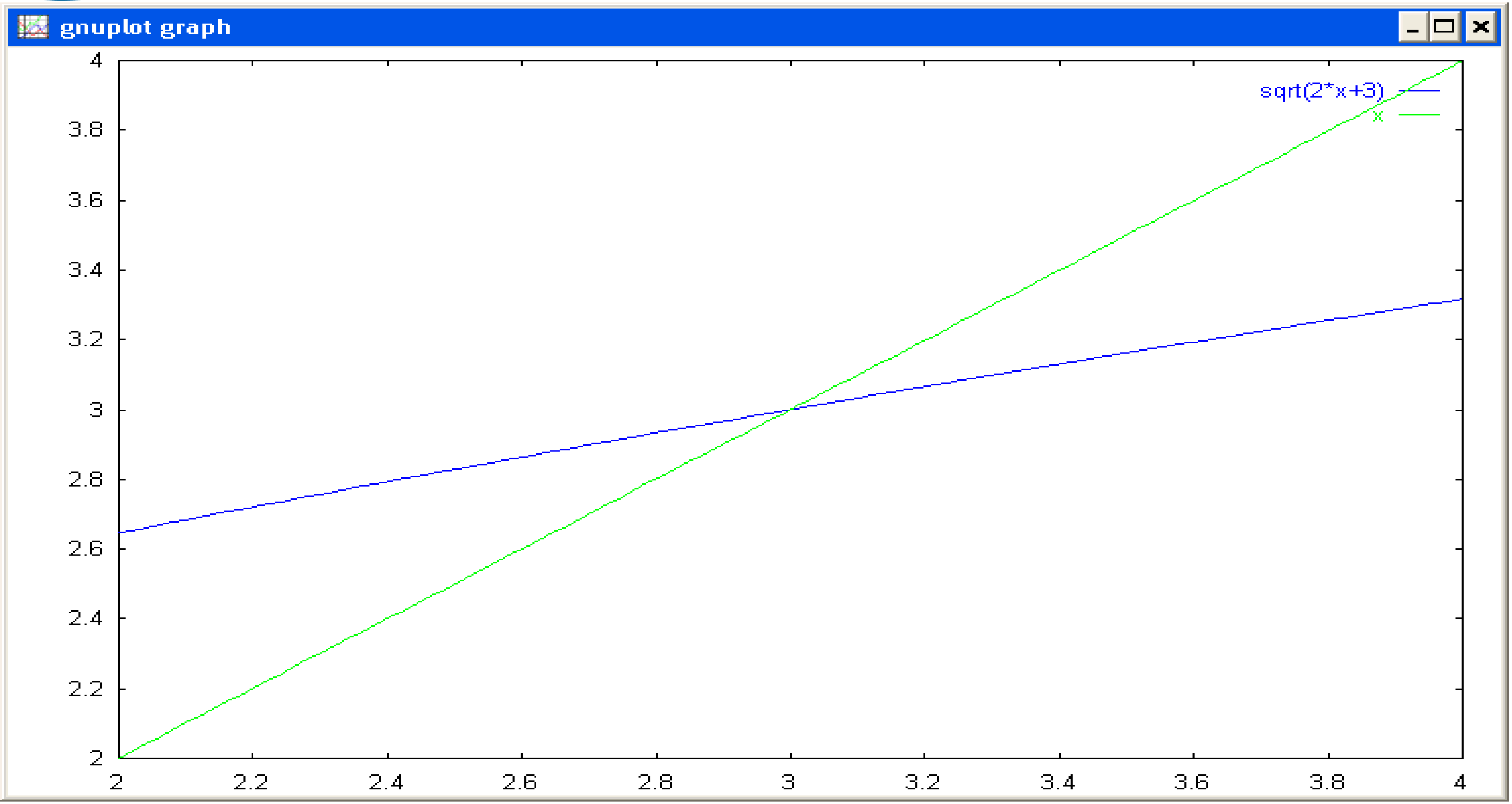
$$x = \sqrt{2x+3}$$

- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$$

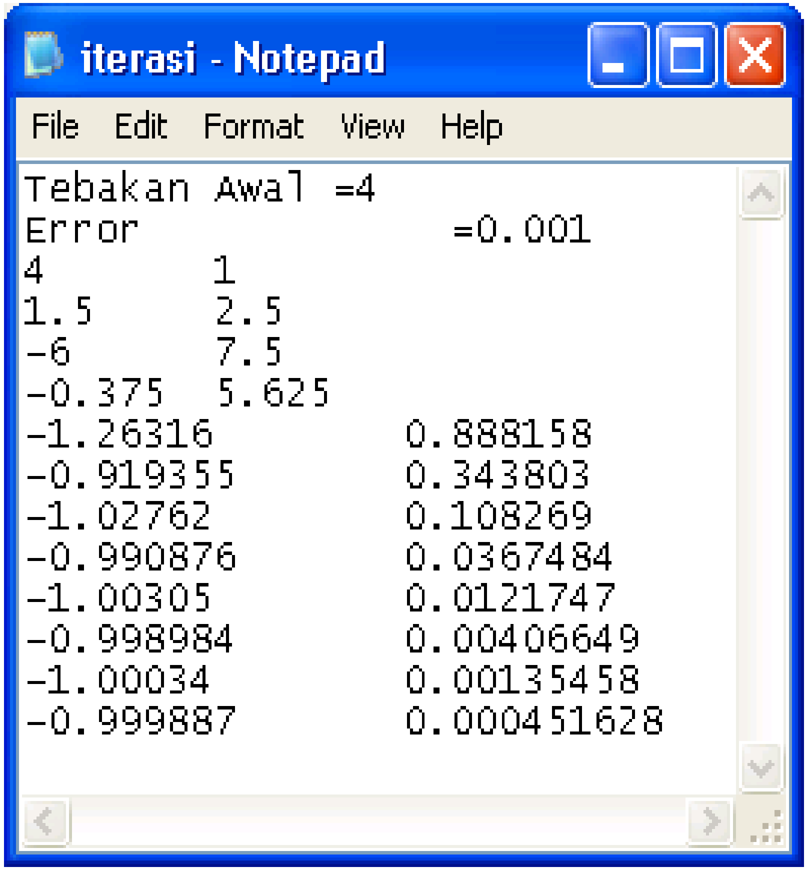
- Hasil = 3

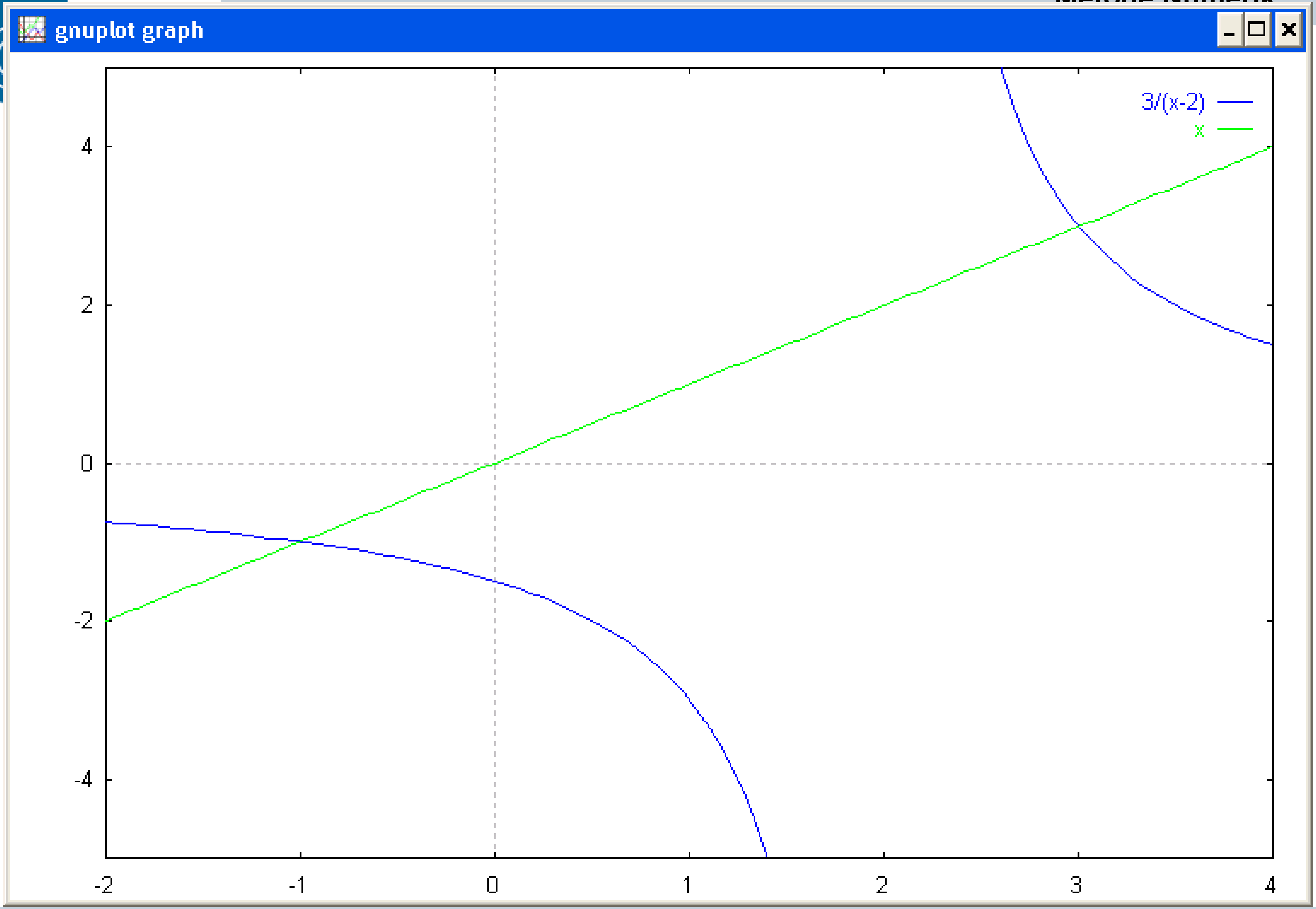



gnuplot graph
sqrt(2*x+3)
x
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8
4

Contoh :

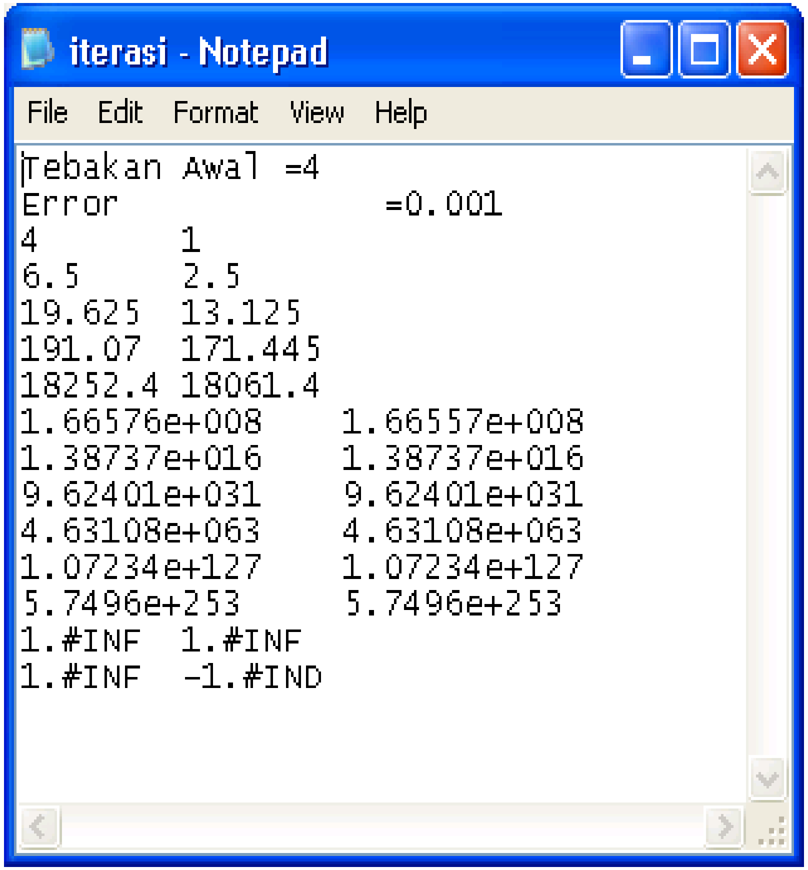
- x^2-2x-3 = 0
- X(x-2) = 3
- X = 3 /(x-2)
- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001
- Hasil = -1




gnuplot graph
3/(x-2)
x
4
2
0
-2
-4
-2
-1
0
1
2
3
4

Contoh :

- $x^2-2x-3 = 0$
- $X = (x^2-3)/2$
- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001
- Hasil divergen



Syarat Konvergensi

- Pada range I = [s-h, s+h] dengan s titik tetap
  - Jika $0<g'(x)<1$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen monoton.
  - Jika $-1<g'(x)<0$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen berosilasi.
  - Jika $g'(x)>1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen monoton.
  - Jika $g'(x)<-1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen berosilasi.

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$$

$$g(x) = \sqrt{2x_n + 3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x_n + 3}}$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = 0.1508 < 1
- Konvergen Monoton

$$x_{n+1} = \frac{3}{(x_n - 2)}$$

$$g(x) = \frac{3}{(x - 2)}$$

$$g'(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = |-0.75| < 1
- Konvergen Berisolasi

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3)}{2}$$

$$g'(x) = x$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = 4 > 1
- Divergen Monoton

Latihan Soal

- Apa yang terjadi dengan pemilihan x^0 pada pencarian akar persamaan :
- $X^3 + 6x - 3 = 0$
- Dengan x

$$x_{n+1} = \frac{-x_n^{\ 3} + 3}{6}$$

- Cari akar persamaan dengan $x^0 = 0.5$
- $X^0 = 1.5$, $x^0 = 2.2$, $x^0 = 2.7$

Contoh :

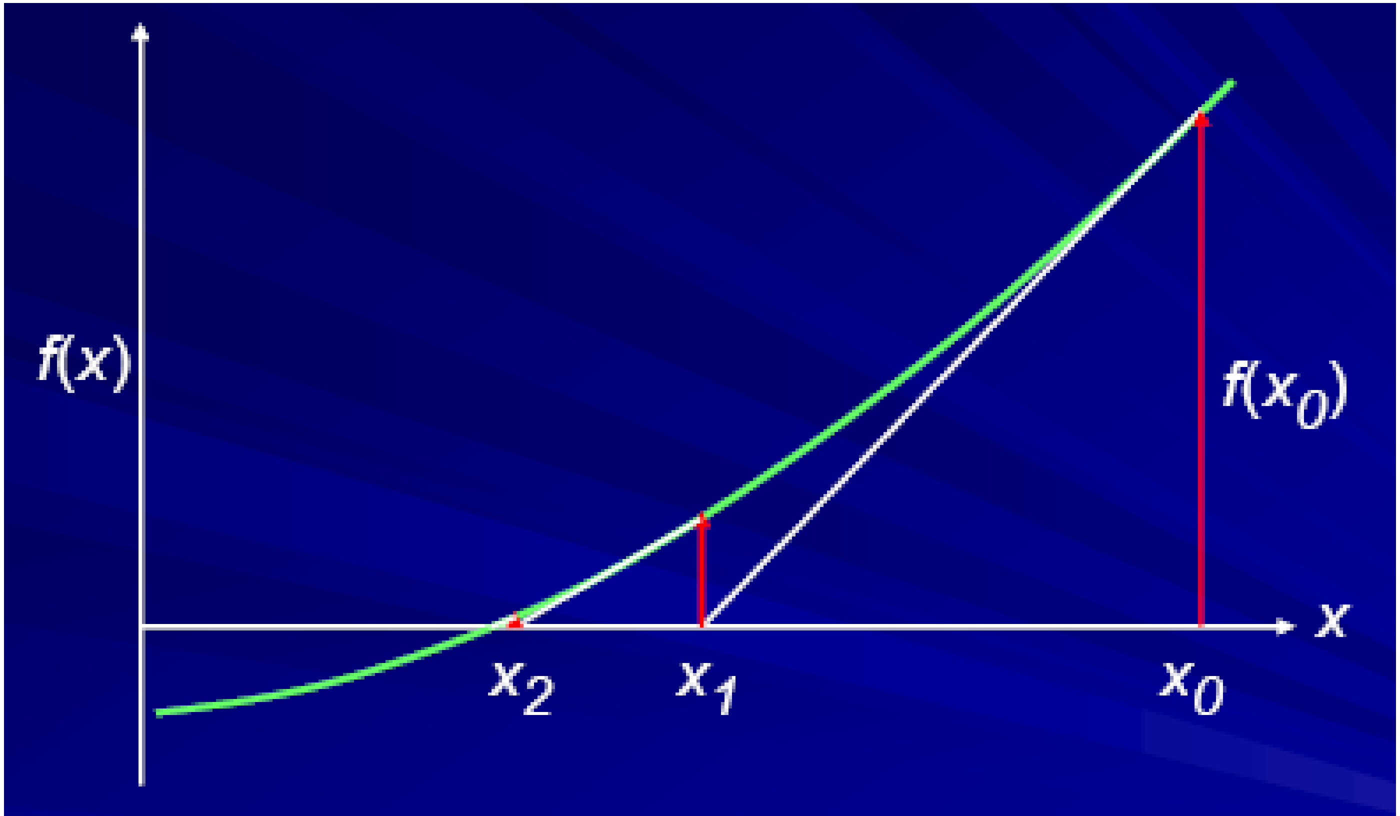
Selesaikan $x + e^x = 0$, maka persamaan diubah menjadi $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$.
Ambil titik awal di $x_0 = -1$, maka
Iterasi 1 : $x = -e^{-1} = -0.3679$ → $F(x) = 0,3243$
Iterasi 2 : $x = e^{-0,3679} = -0,6922$
$F(x) = -0,19173$
Iterasi 3 : $x = -e^{-0,6922} = -0,50047$
$F(x) = 0,10577$
Iterasi 4 : $x = -e^{-0,50047} = -0,60624$
$F(x) = -0,06085$
Iterasi 5 = $x = -e^{-0,60624} = -0,5454$
$F(x) = 0,034217$
Pada iterasi ke 10 diperoleh $x = -0,56843$ dan $F(x) = 0,034217$.

Metode Newton Raphson

- metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.
- Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F\left(x_n\right)}{F^1\left(x_n\right)}$$

Metode Newton Raphson



$$f'(x_0) = \text{slope} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \text{or :} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Algoritma Metode Newton Raphson

1. Definisikan fungsi f(x) dan $f^1(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|f(x_i)| > e$
   - Hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$$

6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

Contoh Soal

- **Selesaikan persamaan x - e^{-x} = 0 dengan titik pendekatan awal x_0 =0**
- $f(x) = x - e^{-x} \rightarrow f'(x)=1+e^{-x}$
- $f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$
- $f'(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0{,}5$$

Contoh Soal

- $f(x_1) = -0{,}106631$ dan $f^1(x_1) = 1{,}60653$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}106531}{1{,}60653} = 0{,}566311$$

- $f(x_2) = -0{,}00130451$ dan $f^1(x_2) = 1{,}56762$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^1(x_2)} = 0{,}566311 - \frac{-0{,}00130451}{1{,}56762} = 0{,}567143$$

- $f(x_3) = -1{,}96.10^{-7}$. Suatu bilangan yang sangat kecil.
- Sehingga akar persamaan $x = 0{,}567143$.

Contoh

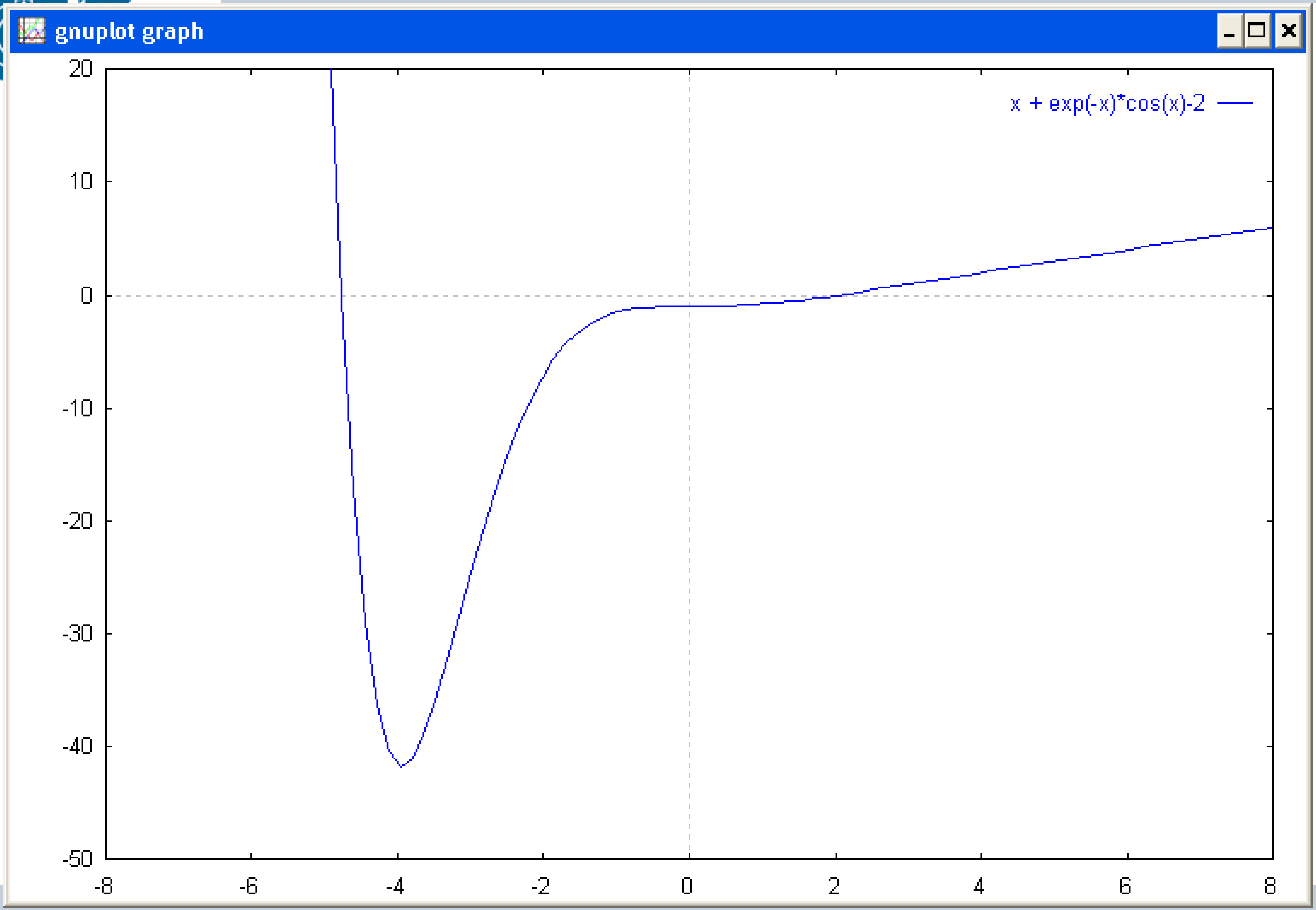
- $x - e^{-x} = 0 \rightarrow x_0 = 0,\ e = 0.00001$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714
Akar terletak di x = 0.567143			

Contoh

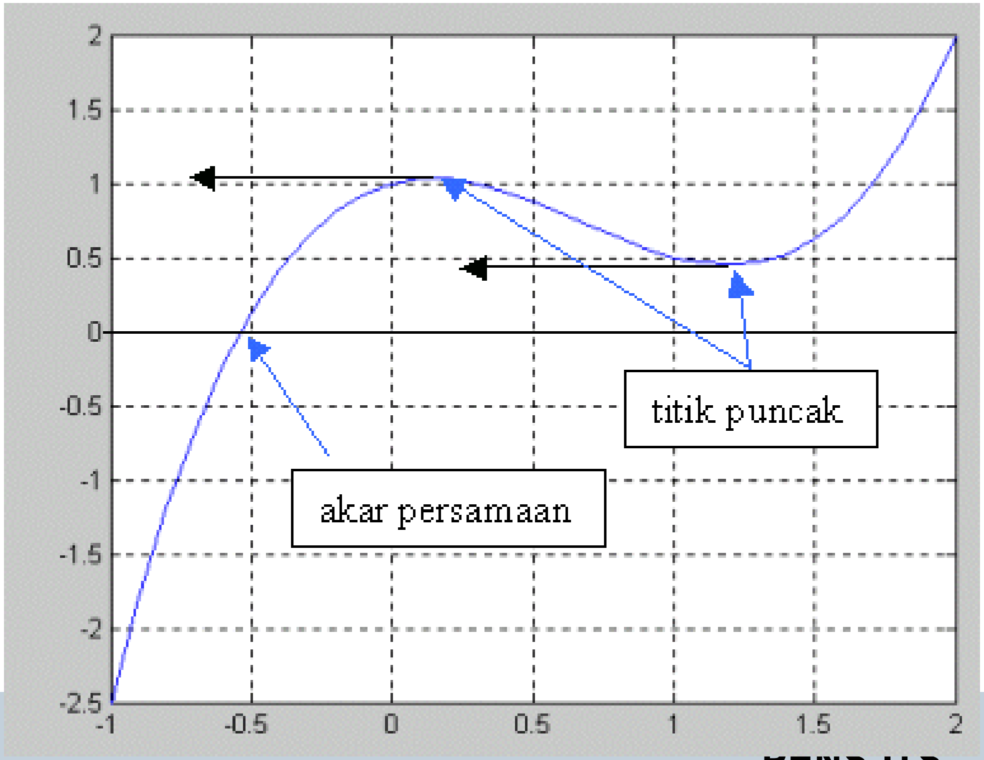
- $x + e^{-x} \cos x - 2 = 0 \rightarrow x_0 = 1$
- $f(x) = x + e^{-x} \cos x - 2$
- $f'(x) = 1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	1	-0.801234	0.491674
1	2.6296	0.566743	1.02753
2	2.07805	0.0172411	0.951394
3	2.05993	3.62703e-005	0.947372
4	2.05989	1.64926e-010	0.947364
Akar terletak di x = 2.05989			


gnuplot graph
x + exp(-x)*cos(x)-2
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Permasalahan pada pemakaian metode newton raphson

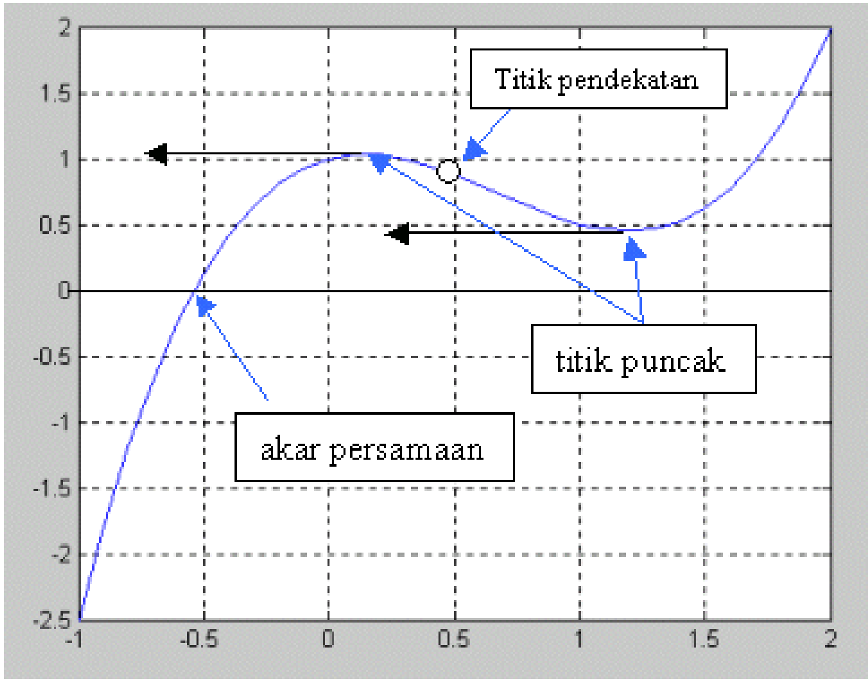
- Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:



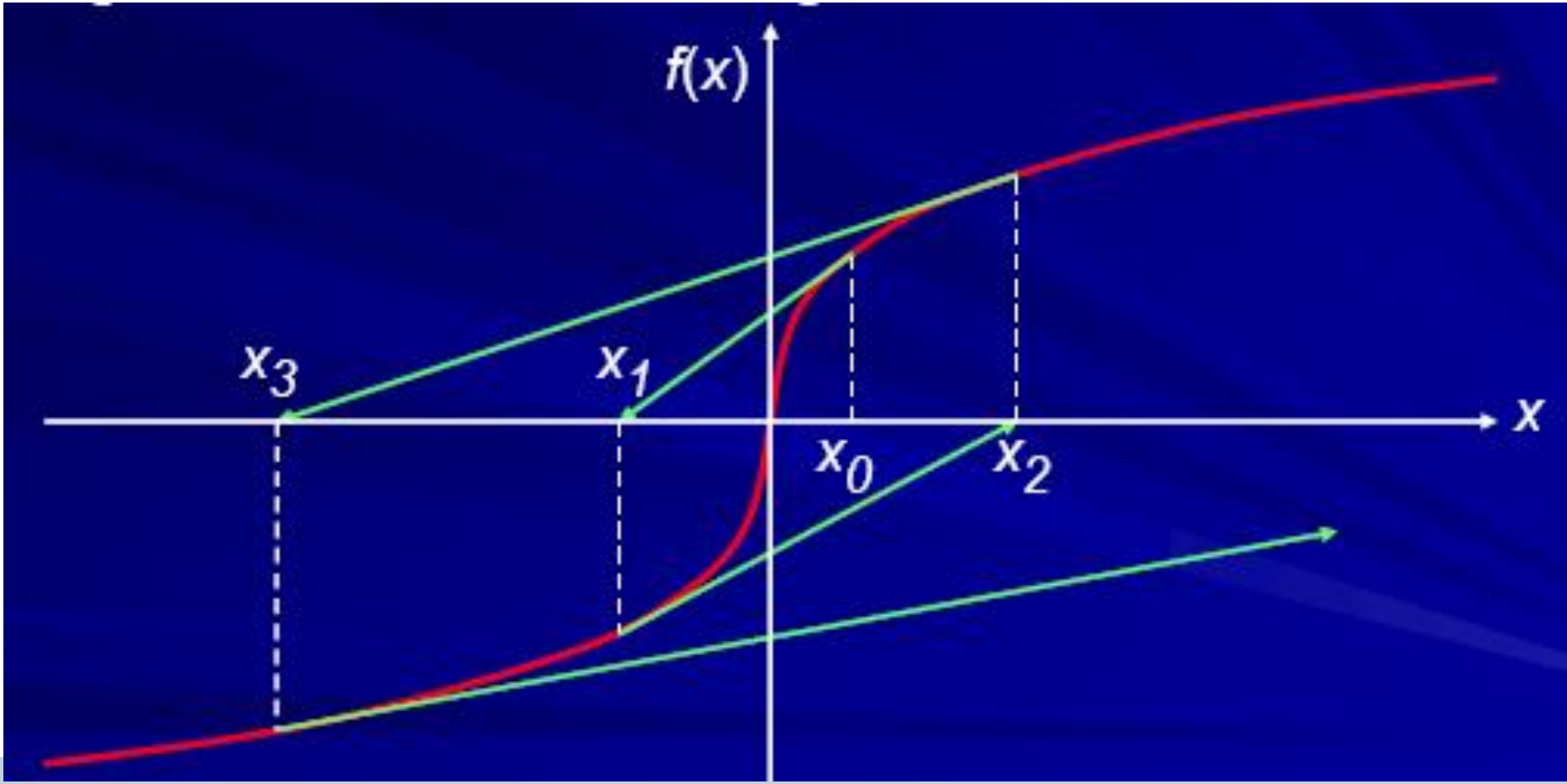
Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

Permasalahan pada pemakaian metode newton raphson

- Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.
- Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*). Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.



Hasil Tidak Konvergen



Penyelesaian Permasalahan pada pemakaian metode newton raphson

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit,

   $x_i = x_i \pm \delta$ dimana adalah δ konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode newton raphson tetap dapat berjalan.

2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

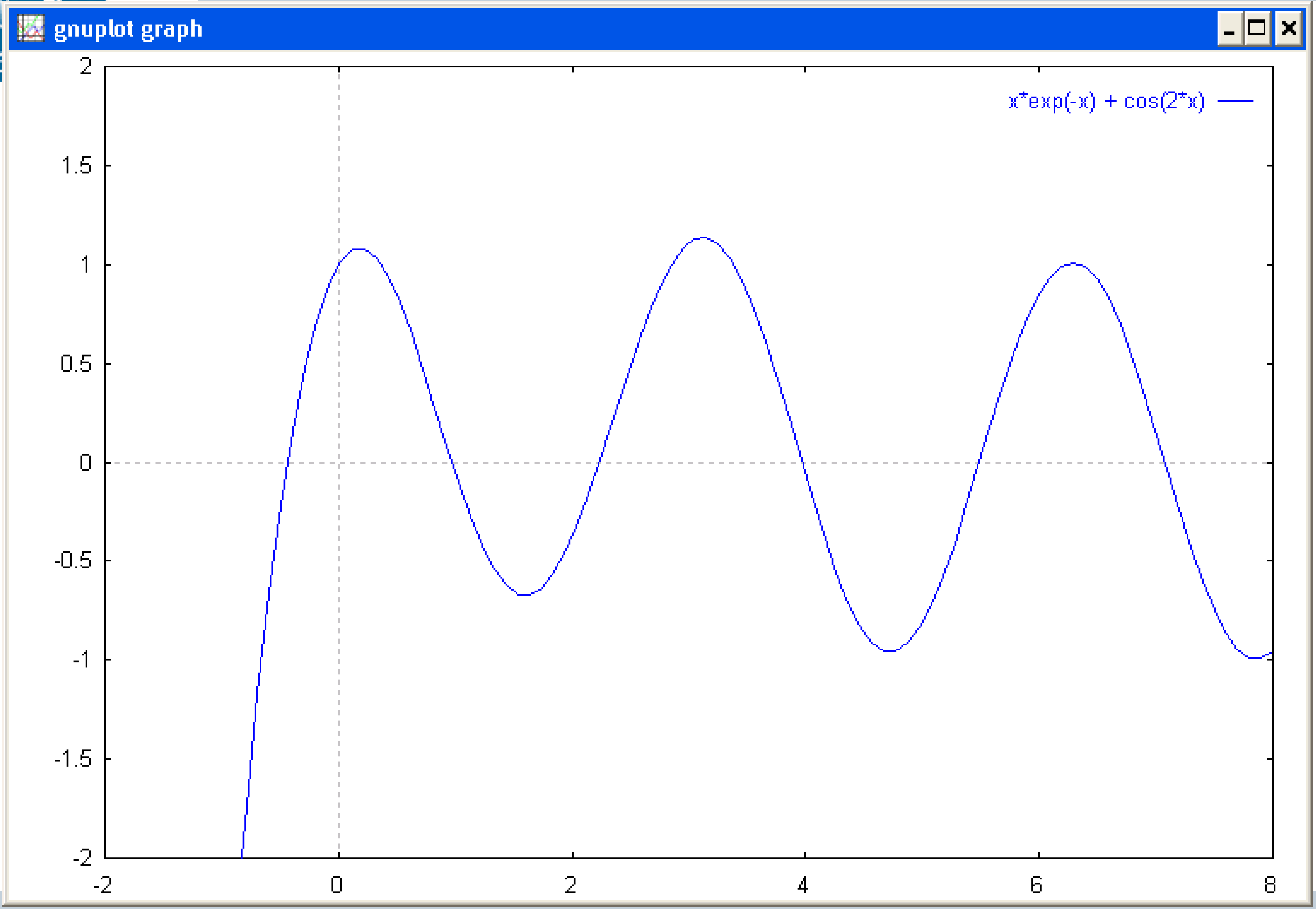
Contoh Soal

- $x \,.\, e^{-x} + \cos(2x) = 0 \rightarrow x_0 = 0{,}176281$
- $f(x) = x \,.\, e^{-x} + \cos(2x)$
- $f1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$
- $F(x_0) = 1{,}086282$
- $F^1(x_0) = -0{,}000015$

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

X = 71365,2

padahal dalam range 0 sampai dengan 1 terdapat akar di sekitar 0.5 s/d 1.


gnuplot graph
x*exp(-x) + cos(2*x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
0
2
4
6
8

Newton Raphson yang telah diperbaiki

- $x \,.\, e^{-x} + \cos(2x) = 0 \rightarrow x_0 = 0{,}176281$
- $f(x) = x \,.\, e^{-x} + \cos(2x)$
- $f^1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$
- **(Titik awal sengaja di ambil pada titik stasioner → Untuk menghindari f'(x)=0 maka nilai x digeser 0.2)**

Toleransi error = 0.00001
Iterasi maksimum = 10

iterasi	x	y	g
1	1.42882	-0.617622	-0.663051
2	0.497335	0.847234	-1.37146
3	1.11509	-0.247015	-1.61847
4	0.962472	0.0208234	-1.86155
5	0.973658	6.39207e-005	-1.84995
6	0.973692	6.46601e-010	-1.84991

Akar terletak di x = 0.973692

Newton Raphson yang telah diperbaiki

- **(Titik awal sengaja di ambil pada titik stasioner → Untuk menghindari f'(x)=0 maka nilai x digeser 0.1)**

```
Pendekatan awal x0 = 0.176281
Toleransi error = 0.00001
Iterasi maksimum = 10
iterasi          x       y       g
1       2.39474 0.295411        1.86686
2       2.2365  0.00182622      1.81087
3       2.23549 4.96441e-007    1.80989
Akar terletak di x = 2.23549
```

Contoh Soal

- Untuk menghindari hal ini sebaiknya digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik. Digunakan pendekatan awal x_0=0.5

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

X

Contoh Soal

- Hasil dari penyelesaian persamaan
- x * exp(-x) + cos(2x) = 0 pada range [0,5]

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991
Akar terletak di x = 0.973692			

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989
Akar terletak di x = 2.23549			

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059
Akar terletak di x = 3.96464			

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai $x = [a, b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :
   $F(x_k) \,.\, F(x_{k+1}) < 0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F(abs(F^1(x_0))) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)

   $x_0 = x_0 + dx$

   hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

   $$x_1 = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$

   bila $|F^1(x_i)| < e$ maka

   $x_i = x_i + dx$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8. Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

Contoh

- Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newthon Raphson. Gunakan e=0.00001. Tebakan awal akar $x_0 = 1$

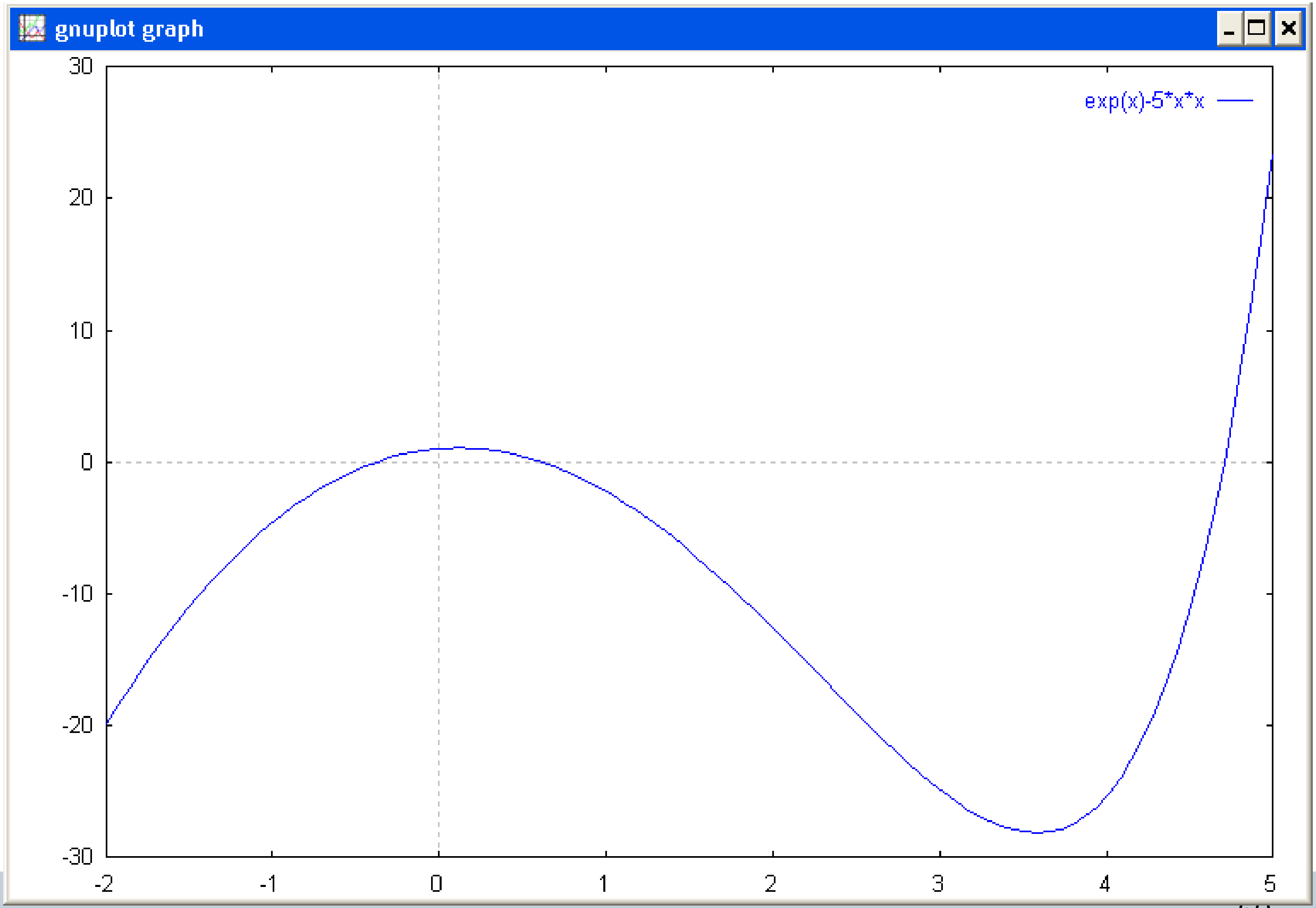
- **Penyelesaian**

$$f(x) = e^x - 5x^2 \qquad f'(x) = e^x - 10x \qquad x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$$

- Prosedur iterasi Newthon Raphson

0	1	-2.28172
1	0.686651	-0.370399
2	0.610741	-0.0232286
3	0.605296	-0.000121011
4	0.605267	-3.35649e-009

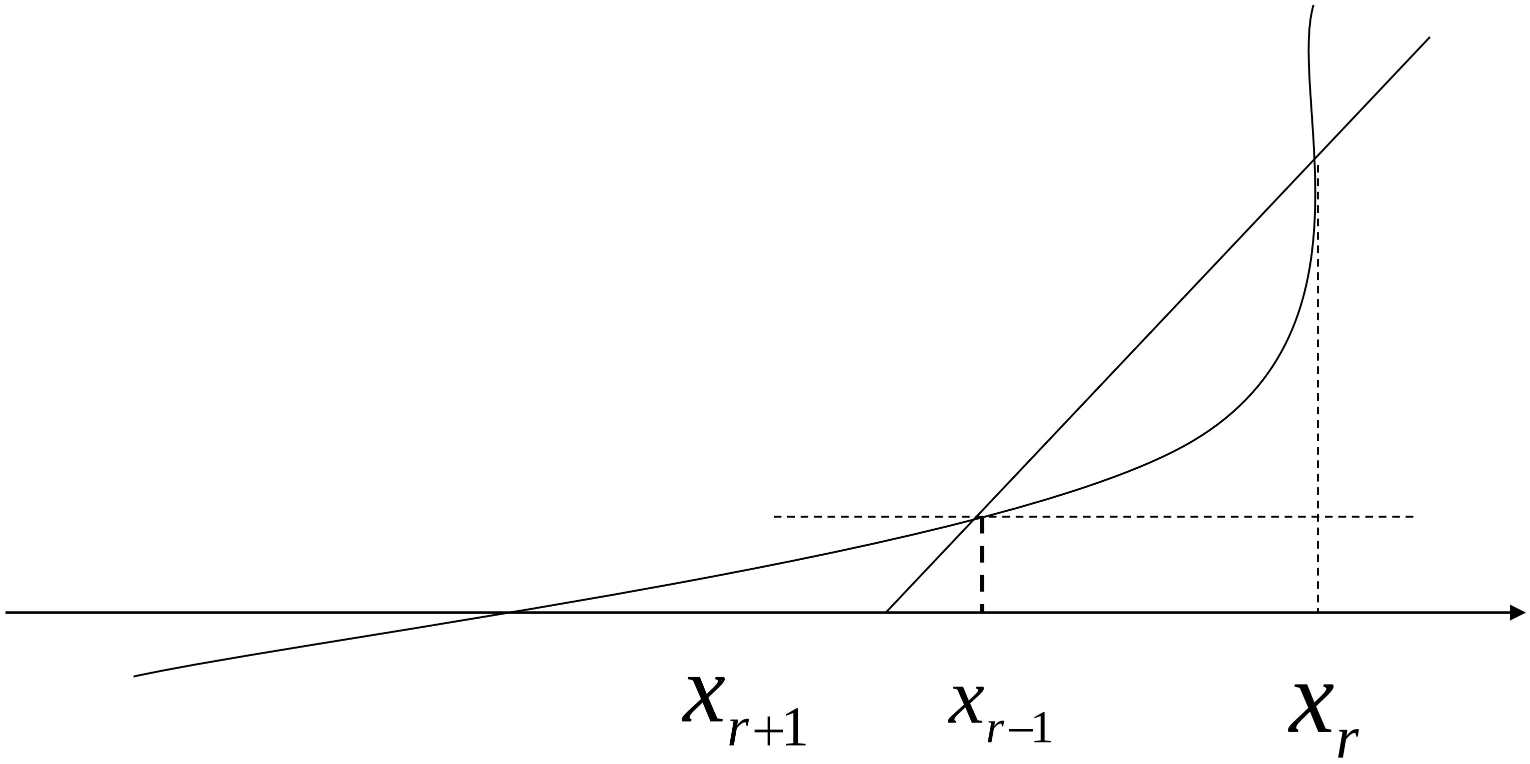
Akar terletak di x = 0.605267


gnuplot graph
exp(x)-5*x*x
30
20
10
0
-10
-20
-30
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Metode Secant

- Metode Newton Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi f'(x).
- Tidak semua fungsi mudah dicari turunannya terutama fungsi yang bentuknya rumit.
- Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekivalen
- Modifikasi metode Newton Raphson dinamakan metode Secant.

x_r



$$f'(x) = \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

- Metode Newton-Raphson

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

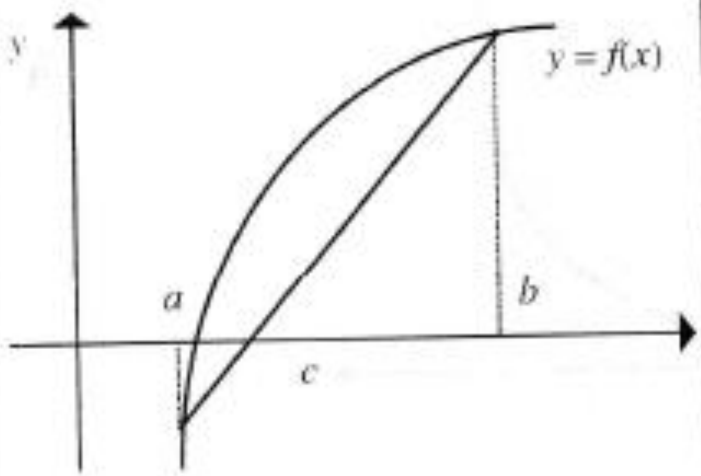
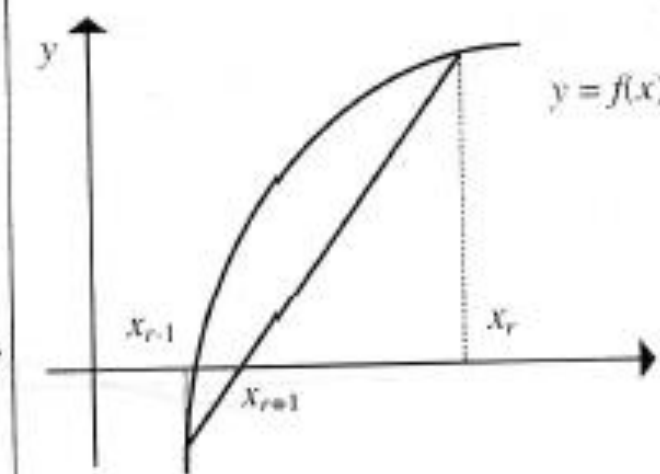
Algoritma Metode Secant :

- Definisikan fungsi F(x)
- Definisikan torelansi error (e) dan iterasi maksimum (n)
- Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x0 dan x1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendakatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
- Hitung F(x0) dan F(x1) sebagai y0 dan y1
- Untuk iterasi I = 1 s/d n atau |F(xi)|

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

  hitung $y_{i+1} = F(x_{i+1})$
- Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

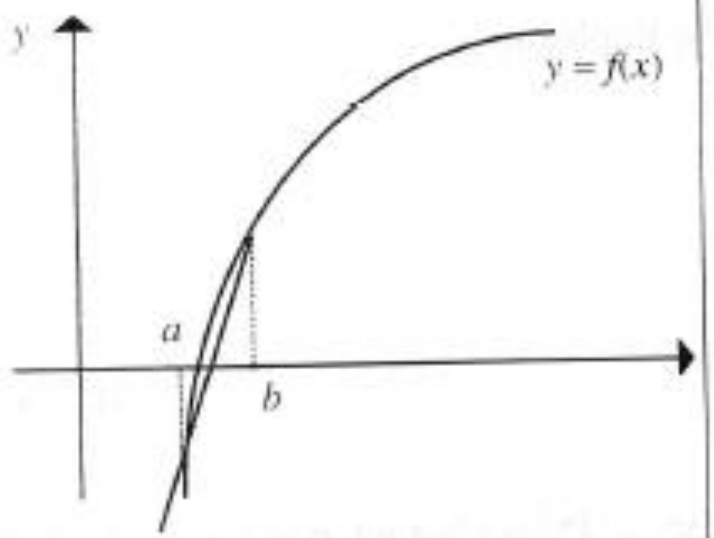
Perbedaan Regula Falsi dan Secant

Metode Regula Falsi	Metode Secant
1. Diperlukan dua buah nilai awal a dan b (ujung-ujung selang) sedemikian sehingga $f(a)\,f(b) < 0$.	1. Diperlukan dua buah nilai awal x_0 dan x_1 (tebakan awal akar), tetapi <u>tidak harus</u> $f(x_0)\,f(x_1) < 0$.
2. <u>Lelaran pertama</u>:  Pada lelaran pertama, tidak ada perbedaan antara regula-falsi dan secant. Perbedaan baru muncul pada lelaran kedua.	2. <u>Lelaran pertama</u>:  Pada lelaran pertama tidak ada perbedaan antara secant dan regula falsi. Perbedaan baru muncul pada lelaran kedua.

Perbedaan Regula Falsi dan Secant

<table>
<tr>
<td>

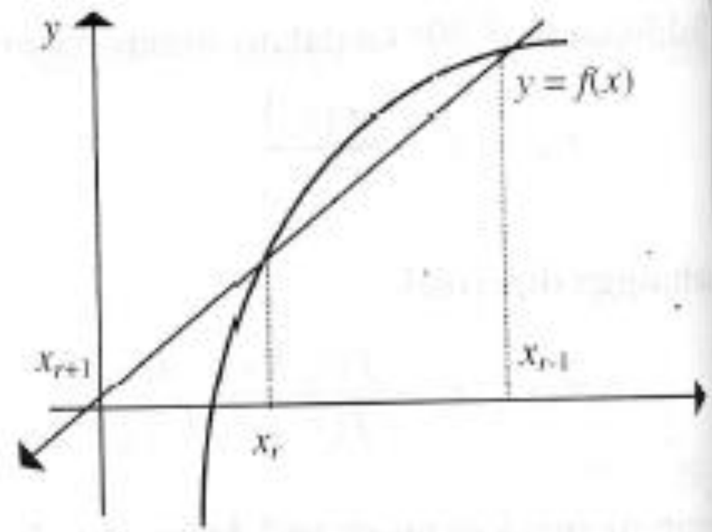
Lelaran kedua:



Perpotongan garis lurus dengan sumbu-x tetap berada di dalam selang yang mengandung akar.

</td>
<td>

Lelaran kedua:



Perpotongan garis lurus dengan sumbu-x mungkin menjauhi akar.

</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Berdasarkan nomor 2 di atas, lelarannya selalu konvergen</td>
<td>3. Berdasarkan nomor 2 di atas, lelarannya mungkin divergen.</td>
</tr>
</table>

Contoh Soal

- Penyelesaian
- $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$?

ambil $x_0 = 0{,}8$ dan $x_1 = 0{,}9$ maka dapat dihitung

$$y_0 = F(x_0) = -0{,}16879$$

$$y_1 = F(x_1) = 0{,}037518$$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

Iterasi 1 : $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0{,}881815$

$$y_2 = 0{,}00153$$

Iterasi 2 : $x_3 = x_2 - y_2 \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0{,}882528$

$$y_3 = 1{,}3.10^{-5}$$

Iterasi 3 : $x_4 = x_3 - y_3 \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0{,}882534$

$$y_4 = 4{,}91.e^{-9}$$

Diperoleh akar $x = 0{,}882534$

Contoh

- Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Secant. Gunakan e=0.00001. Tebakan awal akar $x_0 = 1$

- **Penyelesaian**
- Hasil Tabel

```
Toleransi error = 0.00001
Iterasi maksimum = 10
x0 = 0.5
x1 = 1
1 0.574376 0.126483
2 0.596731 0.0357344
3 0.605533 -0.00112339
4 0.605265 9.35729e-006
Akar terletak di x = 0.605265
```

Contoh Kasus Penyelesaian Persamaan Non Linier

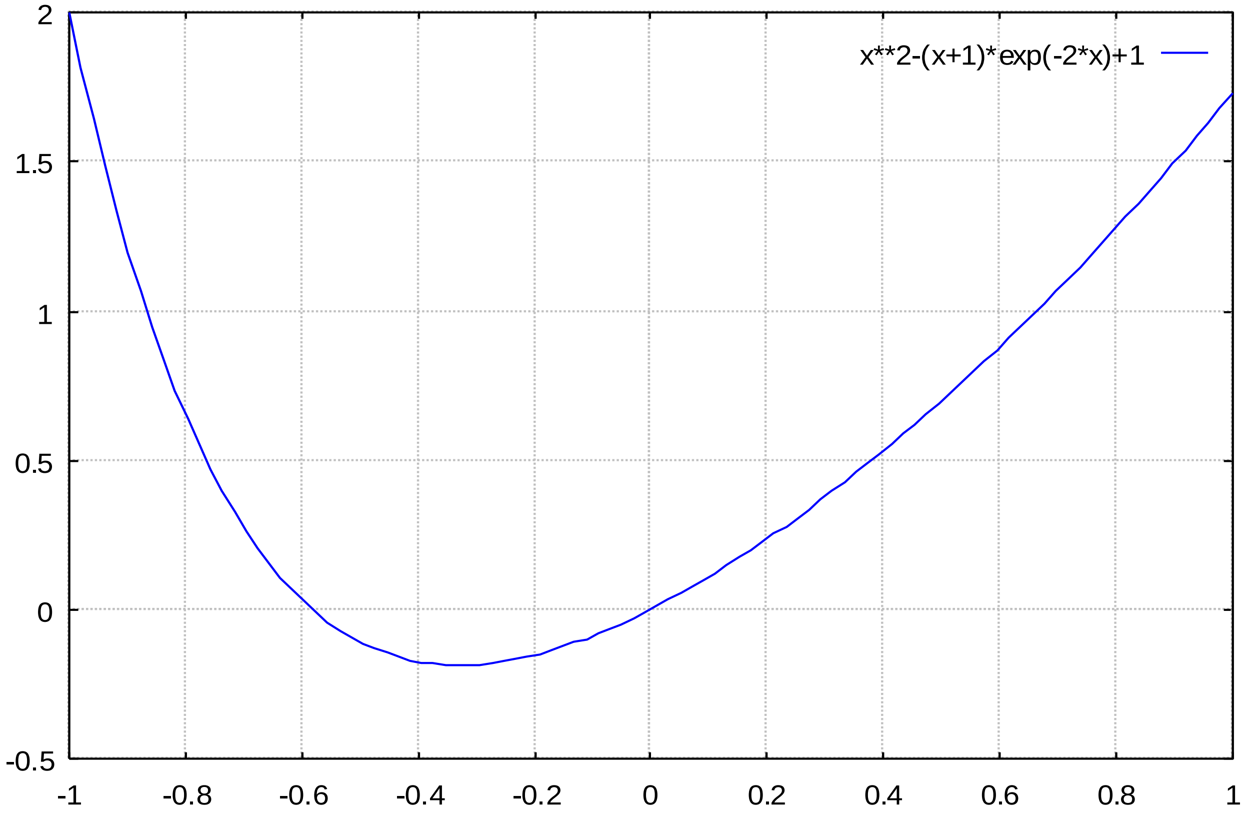
- Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
- Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permasalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
- Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

Penentuan Nilai Maksimal dan Minimal Fungsi Non Linier

- nilai maksimal dan minimal dari f(x) → memenuhi f'(x)=0.
- g(x)=f'(x) → g(x)=0
- Menentukan nilai maksimal atau minimal → f''(x)

Contoh Soal

- Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2-(x+1)e^{-2x}+1$



nilai minimal terletak antara –0.4 dan –0.2

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung g(x)=f'(x)

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x + (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

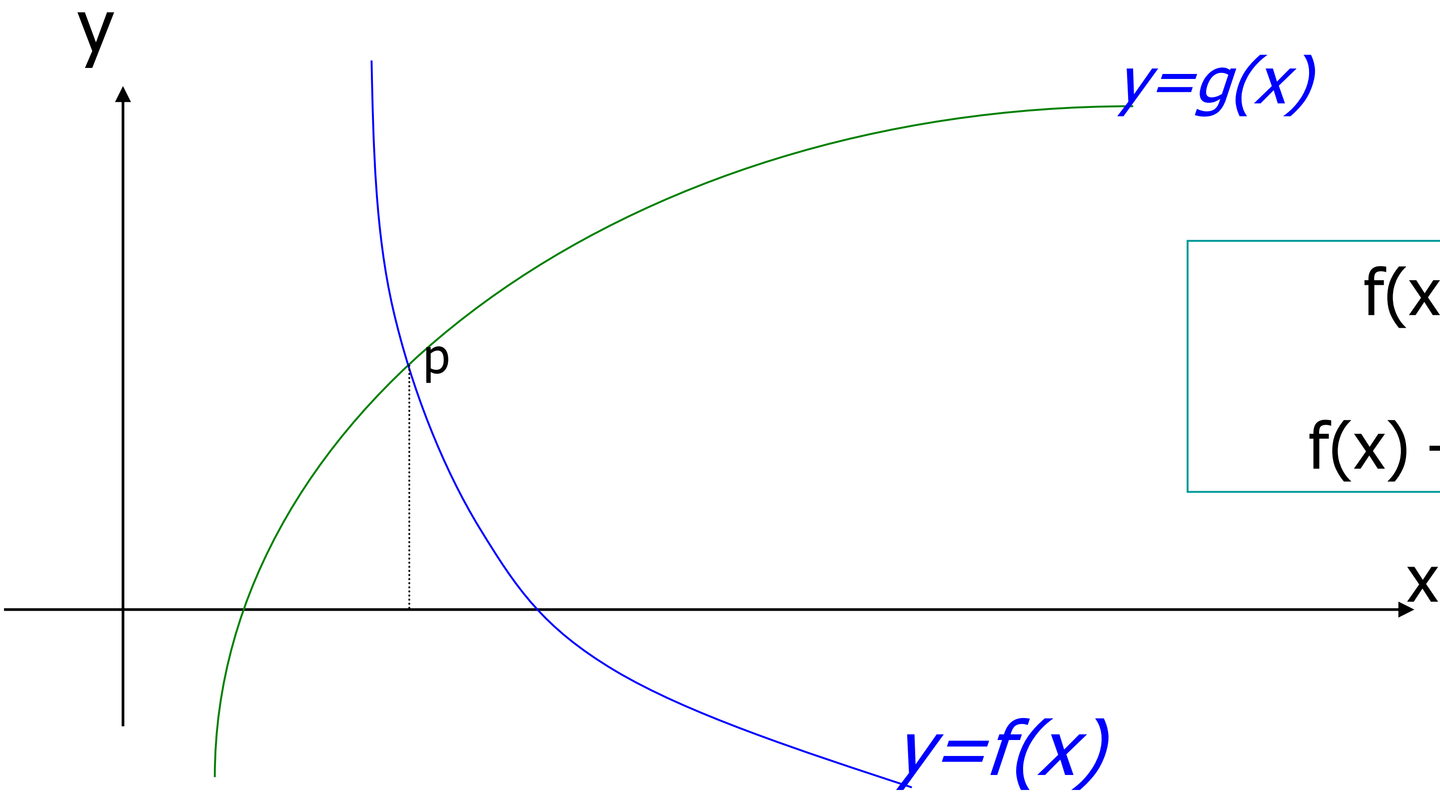
$$2x + (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0=-0.4 dan x1=-0.2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi      x           f(x)
1            -0.316495   0.0581765
2            -0.332006   -0.0113328
3            -0.329477   0.000208218
4            -0.329523   7.28621e-007
Akar persamaan di x = -0.329523
```

Jadi nilai minimal fungsi f(x) terletak di x=-0.329523

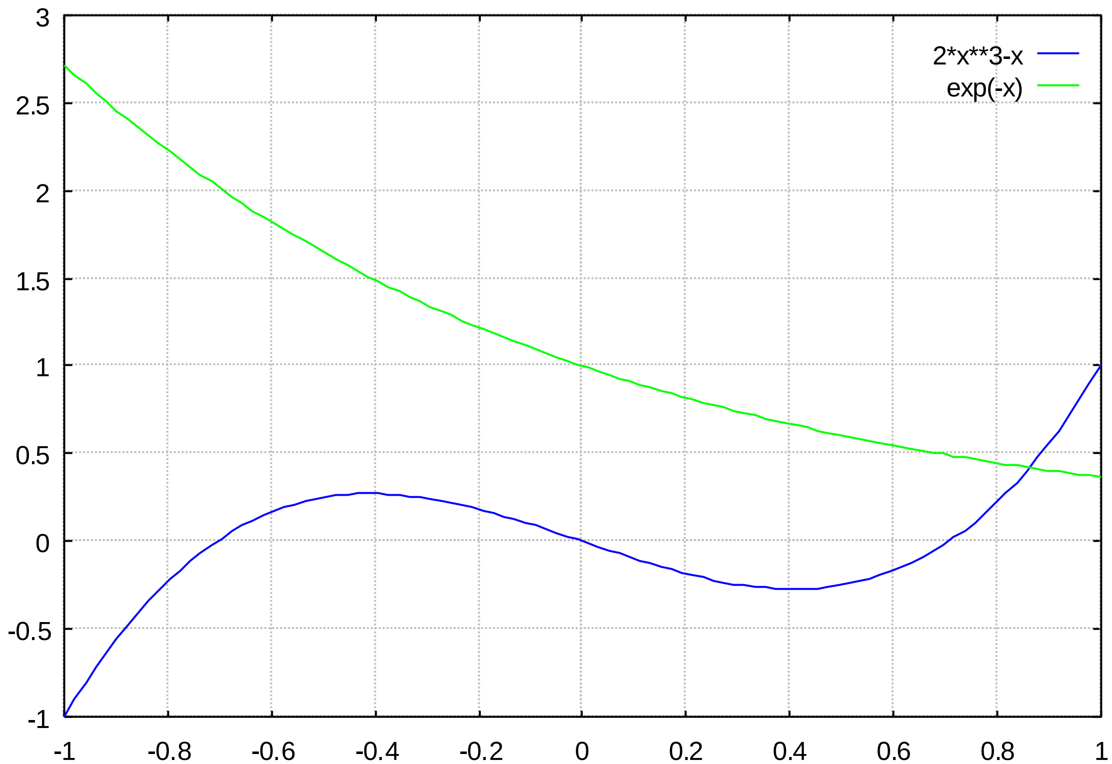
Menghitung Titik Potong 2 Buah Kurva



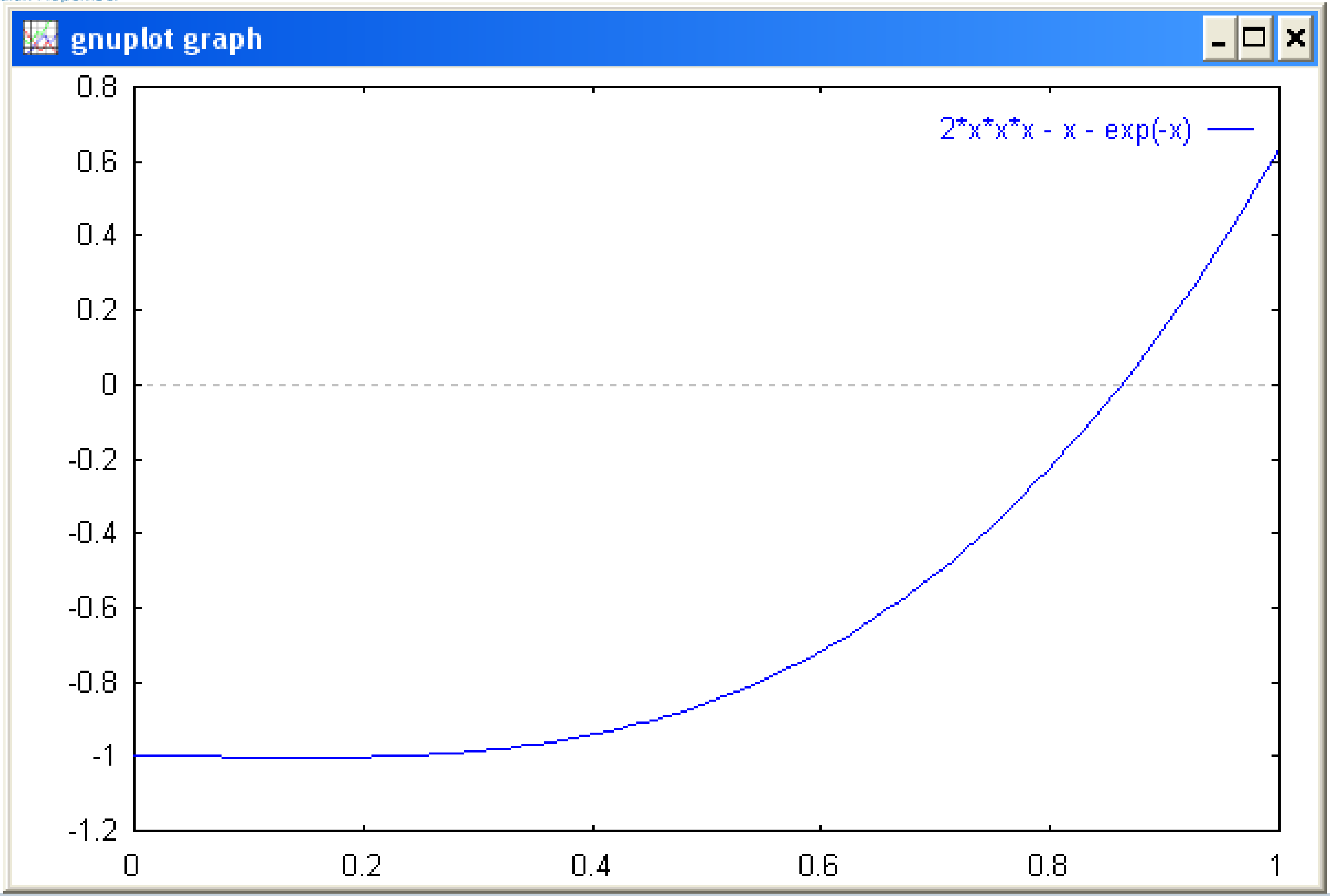
$$f(x) = g(x)$$
atau
$$f(x) - g(x) = 0$$

Contoh Soal

- Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$



akar terletak di antara 0.8 dan 1


gnuplot graph
2*x*x*x - x - exp(-x)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Soal (1/3)

1. Tahun 1225 Leonardo da Pisa mencari akar persamaan

   $F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

   Dan menemukan x = 1.368808107.

   Tidak seorangpun yang mengetahui cara Leonardo menemukan nilai ini. Sekarang rahasia ini dapat dipecahkan dengan metode iterasi sederhana.

   Carilah salah satu dari kemungkinan $x = g(x)$. Lalu dengan memberikan sembarang input awal, tentukan $x=g(x)$ yang mana yang menghasilkan akar persamaan yang ditemukan Leonardo itu.

Soal (2/3)

2. Hitung akar 27 dan akar 50 dengan biseksi dan regula falsi ! Bandingkan ke dua metode tersebut ! Mana yang lebih cepat ?

   Catat hasil uji coba

a	b	N	e	Iterasi Biseksi	Iterasi Regula Falsi
			0.1		
			0.01		
			0.001		
			0.0001		

Hitung akar 27 dan akar 50 dengan metode Newthon Raphson dan Secant.

Soal (3/3)

3. Tentukan nilai puncak pada kurva y = $x^2 + e^{-2x}\sin(x)$ pada range x=[0,10]. Dengan metode newthon raphson
4. Bagaimana menghitung nilai 1/c dengan menggunakan Newton Raphson
5. Carilah 3 akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newthon Raphson. Gunakan e=0.00001. Tentukan tebakan awal akar x_0 untuk mendapatkan ketiga akar tersebut. Tentukan tebakan awal akar x_0 untuk mendapatkan hasil yang divergen.