Bab 3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL)

Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

Topik

- Definisi SPL
- Bentuk Matrik SPL
- Augmented Matrik
- Penyelesaian SPL
- Operasi-operasi Dasar (Elementary Operations)
- Sistem equivalent
- Operasi Baris Elementer
- 3 Kemungkinan Penyelesaian SPL
- Penyelesaian dengan Metode Numerik
- Strategy Pivoting
- Jenis pivoting

Definisi SPL

- Suatu sistem yang merupakan gabungan dari beberapa persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

- SPL diatas mempunyai m persamaan dan n variabel
- SPL mempunyai minimal sebuah solusi, disebut konsisten, jika tidak mempunyai solusi disebut tidak konsisten

SPL

- Bentuk persamaan linier simultan dengan *n* persamaan dan *n* variabel bebas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bentuk Matrik SPL

- SPL dengan m persamaan dan n variabel

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

- Bentuk SPL dapat ditulis dengan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Dapat ditulis Ax = B

Bentuk Matrik SPL

- Dimana A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
- A adalah matrik koefisien dari SPL (matrik Jacobian).
- Vektor x disebut vektor variabel
- Vektor B disebut vektor konstanta

Augmented Matrik

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh

$x + 3y + 2z = 44$

$x + 4y + z = 49$

$2x + 5y + 5z = 83$

- Bentuk matrik SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 49 \\ 83 \end{bmatrix}$$

- Augmented Matrik

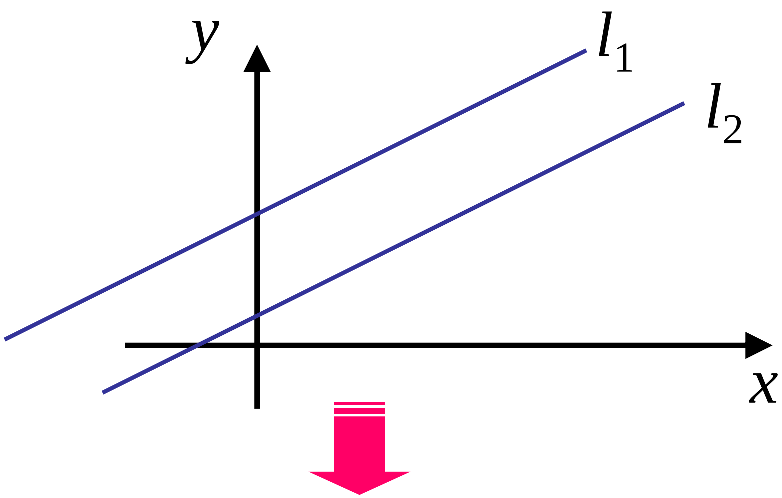
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 44 \\ 1 & 4 & 1 & 49 \\ 2 & 5 & 5 & 83 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian SPL

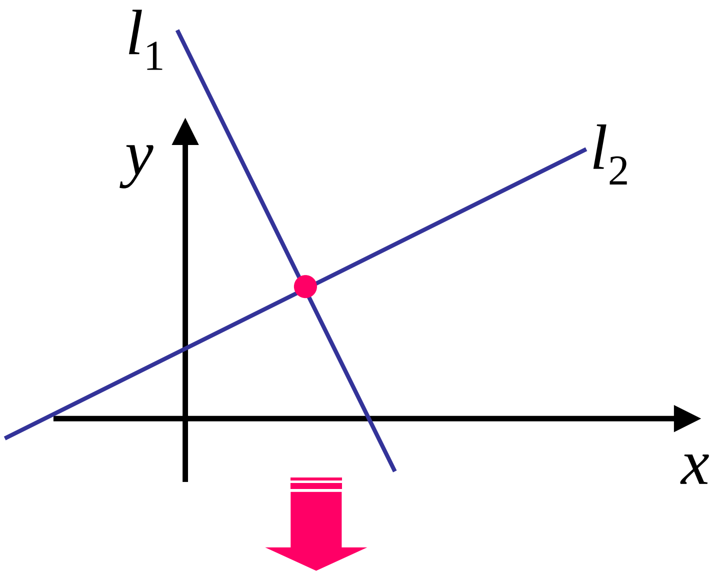
- Berdasarkan penyelesaiannya, SPL dibedakan menjadu 3 macam:
  - Tidak mempunyai penyelesaian (*no solutions*)
  - Tepat satu penyelesaian (*exactly one solution*)
  - Banyak penyelesaian(*infinitely many solutions*)

Penyelesaian SPL

- **Secara geometri** penyelesaian sist pers linier untuk **2 var bebas** dapat digambarkan:



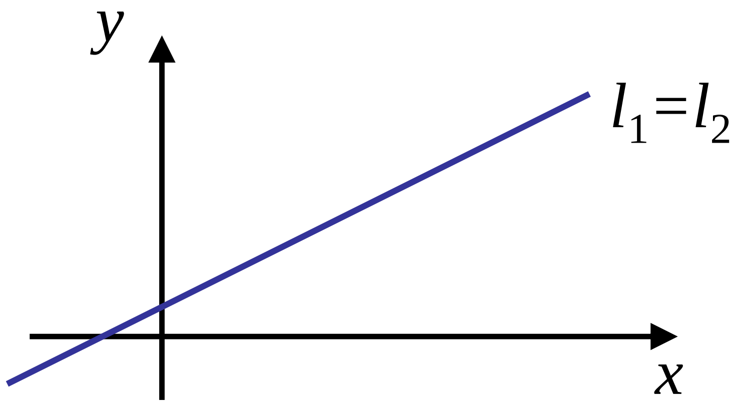
Tidak mempunyai penyelesaian



Mempunyai 1 penyelesaian

Penyelesaian SPL

- **Secara geometri** penyelesaian sist pers linier untuk **2 var bebas** dapat digambarkan:



⇒ Mempunyai banyak penyelesaian

Contoh 1

- Seorang pembuat boneka ingin membuat dua macam boneka yaitu boneka A dan boneka B. Kedua boneka tersebut dibuat dengan menggunakan dua macam bahan yaitu potongan kain dan kancing. Boneka A membutuhkan 10 potongan kain dan 6 kancing, sedangkan boneka B membutuhkan 8 potongan kain dan 8 kancing.
- **Permasalahannya adalah berapa buah boneka A dan boneka B yang dapat dibuat dari 82 potongan kain dan 62 kancing ?**

Contoh 1

- Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan menyatakan :
  - x = jumlah boneka A
  - y = jumlah boneka B

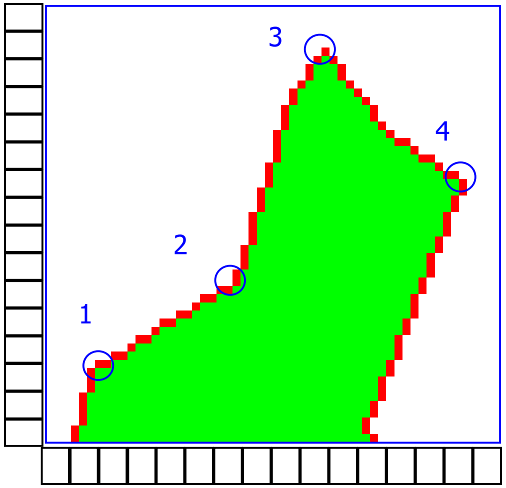
- Untuk setiap bahan dapat dinyatakan bahwa:
  - Potongan kain
    10 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 82
  - Kancing
    6 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 62

- Atau dapat dituliskan dengan :
  $10x + 8y = 82$
  $6x + 8y = 62$

- Penyelesaian dari permasalahan di atas adalah penentuan nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan di atas.

Contoh 2

- Perhatikan potongan peta yang sudah diperbesar (*zoom*) sebagai berikut :



- Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar.
- Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial.
- Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.

Contoh 2

- 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

  Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d

  Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d

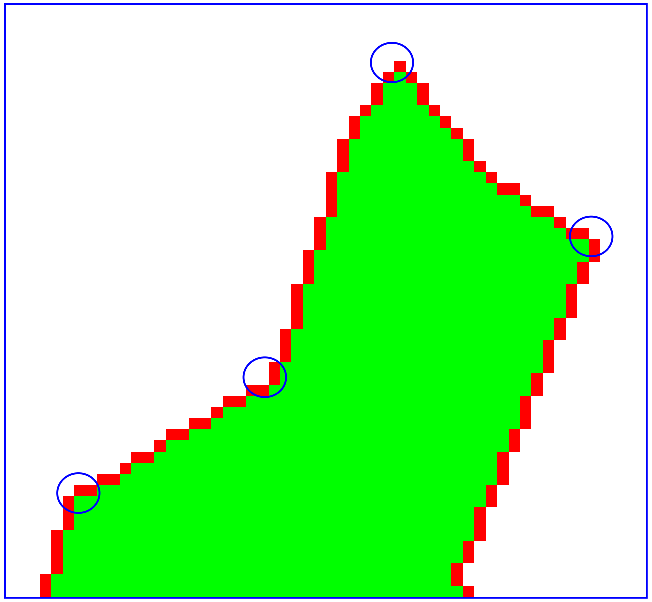
  Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d

  Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d

- Nilai a, b, c dan d adalah penyelesaian dari permasalahan di atas.

Contoh 2

- Setelah nilai a, b, c dan d diperoleh maka persamaan polinomialnya didapatkan dan dengan menggunakan step x yang lebih kecil dapat digambarkan grafiknya dengan lebih halus.



Operasi-operasi Dasar (Elementary Operations)

- Terdapat dua tahap untuk menyelesaikan SPL yaitu:
  - Reduksi sistem (mengeliminasi variabel)
  - Mendeskripsikan himpunan penyelesaian
- Tujuan dari reduksi sistem adalah untuk menyederhanakan SPL dengan mengeliminasi variabel-variabel, sehingga sistem yang dihasilkan mempunyai himpunan penyelesaian yang sama dengan sistem aslinya.

Sistem *equivalent*

- Definisi

  Dua SPL dengan n variabel disebut *equivalent* jika SPL tersebut mempunyai himpunan penyelesaian yang sama

Operasi Baris Elementer

- Untuk reduksi sistem, SPL menggunakan operasi baris elementer (elementary row operations). Terdapat 3 operasi :
  - Menukar dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$)
  - Mengalikan sebuah baris dengan sebuah skalar ($k R_i$)
  - Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. ($R_i + kR_j$)

Operasi Baris Elementer

- Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. (R_i + kR_j)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B_2 - 2B_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B2 – 2B1 artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen pada baris ke satu

- $-2B_1$: -2 -2 -4 18

  B_2 : 2 4 -3 1

  B2 – 2B1 : 0 2 -7 19 (menjadi elemen baris ke-2)

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{B_2 - 2B_1}} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{B_3 - 3B_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B_2 - 2B_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B_3 - 3B_1}}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{1/2B_2}} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{B_3 - 3B_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{1/2B_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B_3 - 3B_2}}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2B_3} \begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \qquad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal `x=1,y=2,z=3`
- Proses reduksi pada contoh diatas disebut ***Eliminasi Gauss-Jordan***

Contoh

$$2x_2 + x_3 = -2$$
$$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - 2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + 5B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal yaitu x1=7, x2=-2 dan x3=-2**

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(a)

Dari matrik augmented SPL direduksi dengan operasi baris elementer diperoleh bentuk reduced echelon form. Terdapat 4 kemungkinan penyelesaian seperti berikut :

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

Penyelesaian (a)

$$
\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -2 \\ z &= 4 \end{aligned}
$$

iTS Institut Teknologi Sepuluh Nopember

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(b1)

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (b)

Variabel bebas (free variables)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-3x_2 - 3x_3 = -6$$

Variabel depan (leading variables)

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(b2)

$$x_1 = 4 - x_2 - 2x_3$$
$$x_2 = 2 - x_3$$

Variabel bebas dapat diisi dengan sembarang nilai k, selanjutnya dapat ditentukan variabel depan

$$x_1 = 2 - x_3$$
$$x_2 = 2 - x_3$$

Terdapat banyak penyelesaian, penyelesaian secara umum diberikan dengan menggunakan formula

$$x_1 = 4 - x_2 - 2x_3$$
$$x_2 = 2 - x_3$$

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (c)

1. Persamaan yang bersesuai dengan baris terakhir tsb adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

2. Tidak ada nilai x_i yang memenuhi persamaan tersebut →

Contoh

- Matrik di bawah ini adalah matrik reduced echelon form. Jelaskan SPL yang berhubungan dengan matrik tersebut dan bagaimana penyelesaiannya?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh

- Matrik A adalah matrik augmented dengan SPL sbb:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -2$$
$$x_3 = 7$$

SPL mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $x_1 = 3\ x_2 = -2\ x_3 = 7$

- Matrik B adalah matrik augmented dengan SPL sbb:

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_2 + 3x_3 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

SPL tidak mempunyai penyelesaian karena pada persamaan ke-3, SPL tidak konsisten

Contoh

- Matrik C adalah matrik augmented dengan SPL :

$$x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 2$$
$$x_3 - 5x_4 = 1$$

Matrik C adalah matrik augmented dengan SPL :

$$x_1 = 2 + 3x_2 - 4x_4$$
$$x_3 = 1 + 5x_4$$

Variabel depan adalah x_1 dan x_3, variabel bebas adalah x_2 dan x_4. SPL mempunyai penyelesaian banyak dapat dinyatakan dengan formula :

$$x_1 = 2 + 3s - 4t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = 1 + 5t$$
$$x_4 = t$$

Contoh

- Matrik D adalah matrik augmented dengan SPL :

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$x_3 = 0$$

Matrik D adalah matrik augmented dengan SPL : $x_1 = 5 - 2x_2$

$$x_3 = 0$$

- Variabel depan adalah x_1 dan x_3, variabel bebas adalah x_2. SPL mempunyai penyelesaian banyak dinyatakan dengan formula :

$$x_1 = 5 - 2s$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = 0$$

Metode Analitik

- metode grafis
- aturan Crammer
- invers matrik

Penyelesaian dengan Metode Numerik

- Metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode Eliminasi Gauss

- Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- matrik diubah menjadi augmented matrik :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Contoh :

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 6 \\
1 & 2 & -1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 10
\end{bmatrix}
$$

Contoh :

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{matrix} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- Penyelesaian :

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss Naif (Biasa)

- Masukkan ukuran matrik N, matrik A dan vektor B
- Buat matrik augmented [A|B] namakan dengan a
- Untuk baris ke-i=0 s/d i<n-1

  Untuk baris ke-j=i+1 s/d j<n

  Lakukan Operasi Baris Elementer

  Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$

  Untuk kolom k=0 s/d n

  Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c * a_{i,k}$

- Hitung akar untuk i=n s/d 1

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - -a_{i,n}x_n\right)$$

Contoh

- Selesaikan SPL berikut ini dengan metode Eliminasi Gauss

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \qquad = 9$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 \leftrightarrow B_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Contoh

- Elemen a_{22} yang akan menjadi pivot pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3.
- Proses pertukaran baris terjadi akibat proses pivoting. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan.

Masalah Pivoting

- Melakukan pertukaran baris untuk menghindari pivot yang bernilai nol adalah cara pivoting yang sederhana (*simple pivoting*)
- Masalah lain yang dapat timbul bila elemen pivot sangat dekat ke nol.

Strategy Pivoting

- Prinsip strategy pivoting adalah jika $a_{p,p}^{(p-1)} = 0$, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan $k > p$, lalu pertukarkan baris p dan baris k.

Jenis pivoting (1)

- *Partial pivoting* (pivoting sebagian)
  - Pivot dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar.

    $|a_{k,p}| = \max\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, \ldots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$
  - Lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p.
  - Misal setelah operasi baris pertama diperoleh matrik sbb:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

  - Untuk operasi baris kedua, carilah elemen x pada kolom ke-2 mulai baris ke-2 s/d kolom ke-4 yang nilai mutlaknya terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2.
  - Elemen x yang nilai mutlaknya terbesar itu sekarang menjadi pivot untuk operasi baris selanjutnya.

Jenis pivoting (2)

- *Complete pivoting* (pivoting lengkap)
  - Disamping baris, kolom juga diikutkan dalam pencarian elemen terbesar dan kemudian dipertukarkan, maka strategi ini disebut pivoting lengkap.
  - Pivoting lengkap jarang dipakai dalam program sederhana karena pertukaran kolom mengubah urutan suku x dan akibatnya menambah kerumitan program secara berarti

Contoh

- Selesaikan SPL dengan metode Eliminasi Gauss tanpa strategi pivoting
$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 &= 1.018 \end{aligned}$$

- **Penyelesaian**

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{0.3454}{0.0003} R_1 = R_2 - 1151 R_1$$

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{bmatrix}$$

Contoh

- Dengan backward subtitusi diperoleh

$$x_2 = {-1805}/{-1804} = 1.001$$

$$x_1 = \frac{1.569 - 1.566 * 1.001}{0.0003} = \frac{1.569 - 1.568}{0.0003} = 3.333$$

$$x_1 = 3.333$$
$$x_2 = 1.001$$

- Solusi ini sangat jauh berbeda dari solusi sebenarnya.
- Kegagalan ini terjadi karena $|a_{11}|$ sangat kecil dibandingkan $|a_{12}|$

Contoh

- Selesaikan SPL dengan metode Eliminasi Gauss dengan strategi pivoting

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 &= 1.018 \end{aligned}$$

- **Penyelesaian**
- Baris pertama dipertukarkan dengan baris ke-2 sehingga 0.3454 menjadi pivot

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{0.0003}{0.3454} R_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{bmatrix}$$

Contoh

- Dengan backward subtitusi diperoleh

$$x_2 = 1.568 / 1.568 = 1$$

$$x_1 = \frac{1.018 - (-2.436)(1.000)}{0.3454} = 10.02$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss dengan strategi pivoting

- Masukkan ukuran matrik N, matrik A dan vektor B
- Buat matrik augmented [A|B] namakan dengan a
- Untuk baris ke-i=0 s/d i<n-1

    if (fabs(a[i][i]) < pivot) Tukar Baris

    Untuk baris ke-j=i+1 s/d j<n

        if (fabs(a[j][i]) != 0)

            Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$

            Lakukan Operasi Baris Elementer

            Untuk kolom k=0 s/d n

                Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c * a_{i,k}$

- Hitung akar untuk i=n s/d 1 $x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - -a_{i,n}x_n\right)$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3,…,dn dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

iTS Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/1)

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Lakukan operasi baris elementer

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan :
$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/4)

$$\begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

ITS Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (2/4)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (3/4)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (4/4)

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \quad \begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Solusi x = 1, y=2 dan z=3

Algoritma Metode Eliminasi Gauss Jordan dengan strategi pivoting

- Masukkan ukuran matrik N, matrik A dan vektor B
- Buat matrik augmented [A|B] namakan dengan a
- Untuk baris ke-i=0 s/d i<n-1

  if (a[i][i] < 0.1) Tukar Baris

  //membuat diagonal menjadi 1

  if (fabs(a[i][i]) != 1)

  pembagi = a[i][i]

  untuk klm k=0 s/d n

$$a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{pembagi}$$

  Untuk baris ke-j=i+1 s/d j<n

  faktor = $a_{j,i}$

  Lakukan Operasi Baris Elementer

  Untuk kolom k=0 s/d n

  Hitung

$$a_{j,k} = a_{j,k} - faktor * a_{i,k}$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

- Metode untuk menyelesaikan SPL yang menggunakan proses iterasi.
- Baik untuk menyelesaikan SPL yang besar
- Bila diketahui SPL seperti di bawah ini

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \ldots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Metode Iterasi Gauss-Seidel

- Berikan nilai awal dari setiap x_i (i=1 s/d n)

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots. - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2^2}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots. - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots. - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

Metode Iterasi Gauss-Seidel

- Dengan menghitung nilai-nilai x_i (i=1 s/d n) menggunakan persamaan-persamaan di atas secara terus-menerus hingga nilai untuk setiap x_i (i=1 s/d n) sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya maka diperoleh penyelesaian dari SPL tersebut.
- Atau dengan kata lain proses iterasi dihentikan bila selisih nilai x_i (i=1 s/d n) dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai tolerasi error yang ditentukan.
- Untuk mengecek kekonvergenan

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| \times 100\%$$

Syarat Konvergen

- Syarat agar konvergen adalah sistem dominan secara diagonal

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}$$

- Contoh SPL berikut:

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 5$$

- Dominan secara diagonal karena
3	>	1	+	-1
4	>	2	+	1
8	>	-1	+	5
  Sehingga pasti konvergen

Algoritma Metode Iterasi Gauss-Seidel

(1) Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya n
(2) Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*
(3) Tentukan toleransi error ε
(4) Tentukan nilai awal dari x_i, untuk i=1 s/d n
(5) Simpan x_i dalam s_i, untuk i=1 s/d n
(6) Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j\right)$$

$$e_i = \left|x_i - s_i\right|$$

(7) iterasi $\leftarrow$ iterasi+1
(8) Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

Contoh

- Selesaikan SPL di bawah ini menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

- Berikan nilai awal : x1 = 0 dan x2 = 0
- Susun persamaan menjadi:

$$x_1 = 5 - x_2$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2x_1)$$

iterasi 1 :

$$x_1 = 5 - 0 = 5 \qquad (5,0)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.5) = 1 \qquad (5,1)$$

iterasi 2 :

$$x_1 = 5 - 1 = 4 \qquad (4,1)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2} \qquad (4,3/2)$$

iterasi 3 :

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \qquad (7/2,3/2)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4} \qquad (7/2,7/4)$$

Contoh

iterasi 4 :

$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$

(13/4,7/4)

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

(13/4, 15/8)

iterasi 5 :

$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$

(25/8, 15/8)

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

(25/8, 31/16)

iterasi 6 :

$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$

(49/16, 31/16)

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

(49/16, 63/32)

iterasi 7 :

$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$

(97/32, 63/32)

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

(97/32, 127/64)

Contoh :

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}
$$

Hasil Divergen

```
"D:\Beban_Mengajar_2005\MetNum\METODE NUMERIK 2006\Praktikum_20...
Nama File Matrik :input.txt
Masukkan Error yang diinginkan = 0.1
Iterasi Maksimum = 20

Ukuran Matrik = 3
| 1 1 1  | 6
| 1 2 -1  | 2
| 2 1 2  | 10

0     0     0     0
1     6     -2     0     6   2   0
2     8     -3     -1.5     2   1   1.5
3     10.5     -5     -3     2.5   2   1.5
4     14     -7.5     -5.25     3.5   2.5   2.25
5     18.75     -11     -8.25     4.75   3.5   3
6     25.25     -15.75     -12.375     6.5   4.75   4.125
7     34.125     -22.25     -18     8.875   6.5   5.625
8     46.25     -31.125     -25.6875     12.125   8.875   7.6875
9     62.8125     -43.25     -36.1875     16.5625   12.125   10.5
10     85.4375     -59.8125     -50.5313     22.625   16.5625   14.3438
11     116.344     -82.4375     -70.125     30.9063   22.625   19.5938
12     158.563     -113.344     -96.8906     42.2188   30.9063   26.7656
13     216.234     -155.563     -133.453     57.6719   42.2188   36.5625
14     295.016     -213.234     -183.398     78.7813   57.6719   49.9453
15     402.633     -292.016     -251.625     107.617   78.7813   68.2266
16     549.641     -399.633     -344.824     147.008   107.617   93.1992
17     750.457     -546.641     -472.137     200.816   147.008   127.313
18     1024.78     -747.457     -646.049     274.32   200.816   173.912
19     1399.51     -1021.78     -883.617     374.729   274.32   237.568
Press any key to continue_
```

Hasil Konvergen

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

"D:\Beban_Mengajar_2005\MetNum\METODE NUMERIK 2006\Praktikum_20...

```
Nama File Matrik :input.txt
Masukkan Error yang diinginkan = 0.1
Iterasi Maksimum = 10

Ukuran Matrik = 3
¦ 2 1 2  ¦ 10
¦ 1 2 -1  ¦ 2
¦ 1 1 1  ¦ 6

0     0     0     0
1     5     -1.5     2.5     5  1.5   2.5
2     3.25     0.625     2.125     1.75  2.125  0.375
3     2.5625     0.78125     2.65625     0.6875  0.15625  0.53125
4     1.95313     1.35156     2.69531     0.609375  0.570313  0.0390625
5     1.62891     1.5332     2.83789     0.324219  0.181641  0.142578
6     1.39551     1.72119     2.8833     0.233398  0.187988  0.0454102
7     1.2561     1.8136     2.9303     0.139404  0.0924072  0.0469971
8     1.1629     1.8837     2.9534     0.0932007  0.0700989  0.0231018
Press any key to continue_
```

Contoh Penyelesaian Permasalahan Persamaan Linier Simultan

- Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

- **Model Sistem Persamaan Linier :**
- **Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:**

  x1 adalah jumlah boneka A

  x2 adalah jumlah boneka B
- **Perhatikan dari pemakaian bahan :**

  B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80

  B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36

- Diperoleh model sistem persamaan linier

  $10\,x1 + 5\,x2 = 80$

  $2\,x1 + 6\,x2 = 36$

Contoh

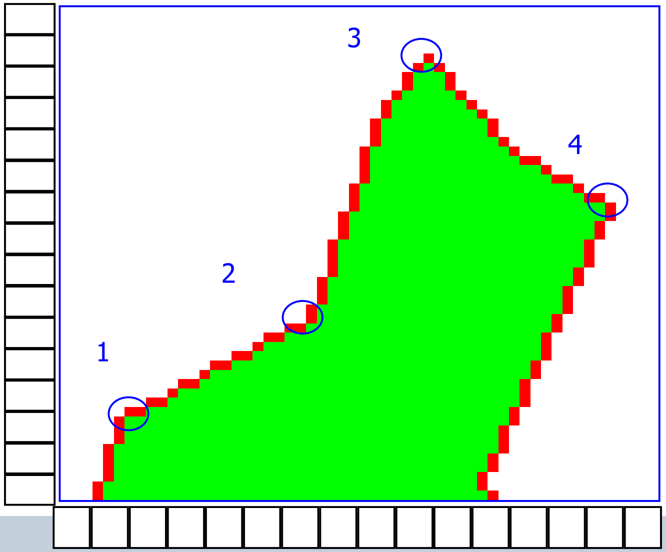
- metode elimin

Augemented Matrik	10	5	80
	2	6	36
B1 <-- B1/10	1	0,5	8
	2	6	36
B2 <-- B2 - 2 B1	1	0,5	8
	0	5	20
B2 <-- B2/5	1	0,5	8
	0	1	4
B1 <-- B1 - 0,5 B2	1	0	6
	0	1	4

- Diperoleh x1 = 6 dan x2 = 4, artinya bahan yang tersedia dapat dibuat 6 boneka A dan 4 boneka B.

Contoh :Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

- Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.



Contoh 2 :

- Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :
- Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :
- Titik 1 → $3 = 8a + 4b + 2c + d$
- Titik 2 → $6 = 343a + 49b + 7c + d$
- Titik 3 → $14 = 512a + 64b + 8c + d$
- Titik 4 → $10 = 1728a + 144b + 12c + d$

iTS Institut Teknologi

- Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Augmented Matrik	------>	8	4	2	1	3
		343	49	7	1	6
		512	64	8	1	14
		1728	144	12	1	10
B1 = B1/8	------>	1	0,5	0,25	0,125	0,375
B2 = B2 - 343 B1		0	-122,5	-78,75	-41,88	-122,6
B3 = B3 - 512 B1		0	-192	-120	-63	-178
B4 = B4 - 1728 B1		0	-720	-420	-215	-638
B2 = B2/(-122,5)	------>	1	0	-0,071	-0,046	-0,126
B1 = B1 - 0,5 B2		0	1	0,6429	0,3418	1,001
B3 = B3 + 192 B2		0	0	3,4286	2,6327	14,196
B4 = B4 + 720 B2		0	0	42,857	31,122	82,735
B3 = B3/3,4286	------>	1	0	0	0,0089	0,1702
B1 = B1 + 0,071 B3		0	1	0	-0,152	-1,661
B2 = B2 - 0,6429 B3		0	0	1	0,7679	4,1405
B4 = B4 - 42,857 B3		0	0	0	-1,786	-94,71
B4 = B4/(-1,786)	------>	1	0	0	0	-0,303
B1 = B1 - 0,0089 B4		0	1	0	0	6,39
B2 = B2 + 0,152 B4		0	0	1	0	-36,59
B3 = B3 + 0,7679 B4		0	0	0	1	53,04

a = -0,303
b = 6,39
c = -36,59
d = 53,04

y = -0,303 x3 + 6,39 x2 – 36,59 x + 53,04

Latihan Soal

- Selesaikan dg Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan dan Iterasi Gauss Seidel

$$1.0001x_1 + 1.5x_2 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$6.122x_1 + 1500.5x_2 = 1506.622$$
$$2000x_1 + 3x_2 = 2003$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

$$2.51x_1 + 1.48x_2 + 4.53x_3 = 0.05$$
$$1.48x_1 + 0.93x_2 - 1.3x_3 = 1.03$$
$$2.68x_1 + 3.04x_2 - 1.48x_3 = -0.53$$

$$8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$
$$2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$
$$x_1 + 6x_3 + 4x_4 = 3$$