Differensiasi Numerik

Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

Topik

- DIFFERENSIASI NUMERIK
- Mengapa perlu Metode Numerik ?
- Diferensiasi dg MetNum
  - Metode Selisih Maju
  - Metode Selisih Tengahan
  - Metode Selisih Mundur
- Differensiasi tingkat tinggi
- Rumus Turunan Kedua dg
  - Metode Selisih Maju
  - Metode Selisih Tengahan
  - Metode Selisih Mundur

DIFFERENSIASI NUMERIK

- Perhitungan kalkulus banyak digunakan untuk keperluan perhitungan geometrik, yang berhubungan dengan perubahan nilai per-satuan waktu atau jarak.
- Secara kalkulus, didefinisikan sebagai perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{ax \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- penentuan titik puncak kurva y = f(x) → dy/dx = 0

Mengapa perlu Metode Numerik ?

- Terkadang terdapat suatu fungsi yang sulit dihitung secara manual
- Untuk mengotomatiskan, tanpa harus menghitung manualnya

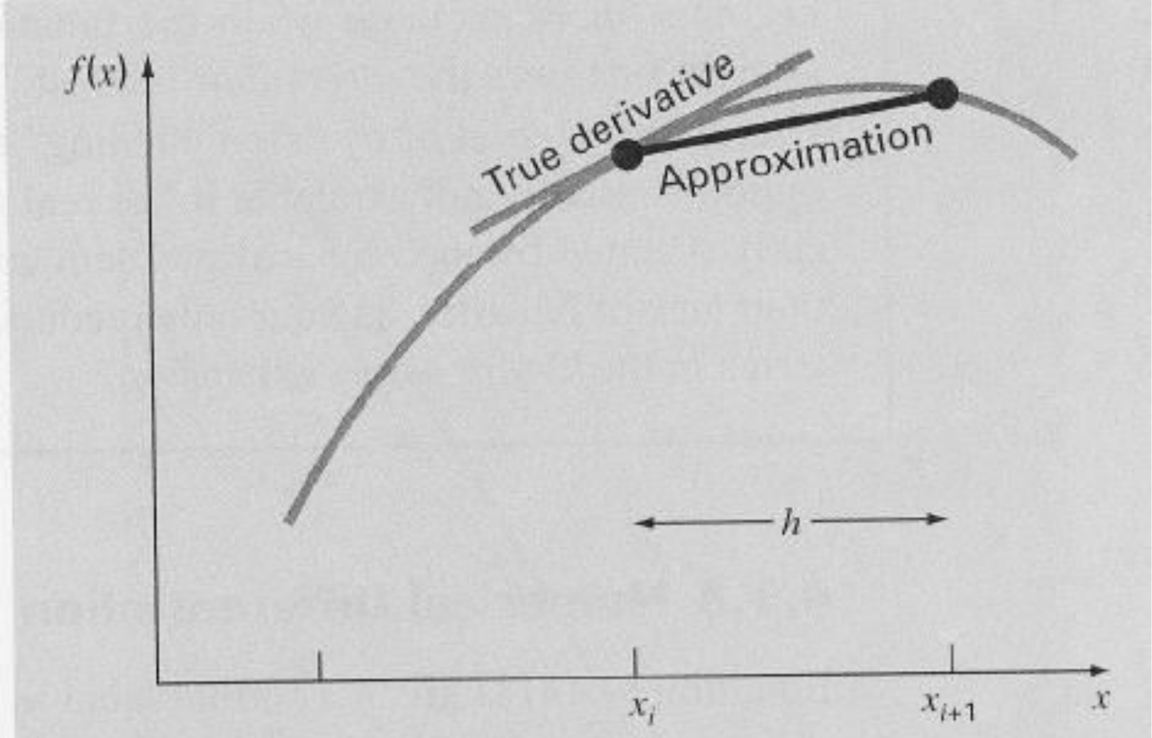
Diferensiasi dg MetNum

- Metode Selisih Maju
- Metode Selisih Tengahan
- Metode Selisih Mundur

Metode Selisih Maju

- Metode selisih maju merupakan metode yang mengadopsi secara langsung definisi differensial

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



(a)

Metode Selisih Maju

- Rumus-rumus turunan numerik diperoleh dari deret Taylor
- Misalkan diberikan titik-titik (x_i,f_i) i=0,1,2,…,n yang dalam hal ini

$$x_i = x_0 + ih$$

- dan

$$f_i = f(x_i)$$

Metode Selisih Maju

- Uraikan $f(x_{i+1})$ disekitar x_i

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + h^2/2\, f_i'' + \ldots \quad \text{(P.7.4)}$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - h/2\, f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h/2 f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \quad \text{(P.7.5)}$$

yang dalam hal ini $O(h) = h/2 f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$.

Metode Selisih Maju

- Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil
- Error yang dihasilkan

$$\mathrm{E(f)} = \frac{1}{2} hf^{11}(x)$$

Contoh :

- Hitung differensial
- *f(x)=e-ˣsin(2x)*
- *+1* dari range x=[0,1] dengan h=0.05

X	f(x)	f'(x)	eksak	error
0	1	-	1	-
0.05	1.04754	0.950833	0.902499	0.0483341
0.1	1.09033	0.855827	0.809984	0.0458431
0.15	1.12862	0.765792	0.722421	0.0433711
0.2	1.16266	0.680682	0.639754	0.040928
0.25	1.19268	0.600434	0.561911	0.0385228
0.3	1.21893	0.524967	0.488804	0.0361632
0.35	1.24164	0.454185	0.420329	0.0338562
0.4	1.26103	0.387978	0.356371	0.0316077
0.45	1.27735	0.326227	0.296804	0.0294228
0.5	1.29079	0.2688	0.241494	0.0273059
0.55	1.30156	0.21556	0.1903	0.0252606
0.6	1.30988	0.166361	0.143071	0.0232898
0.65	1.31594	0.121053	0.0996572	0.0213958
0.7	1.31991	0.0794806	0.0599004	0.0195802
0.75	1.32198	0.0414863	0.023642	0.0178443
0.8	1.32233	0.00691036	-0.009278	0.0161887
0.85	1.32111	-0.0244081	-0.0390218	0.0146137
0.9	1.31848	-0.0526302	-0.0657492	0.013119
0.95	1.31458	-0.0779162	-0.0896204	0.0117042
1	1.30956	-0.100425	-0.110794	0.0103684

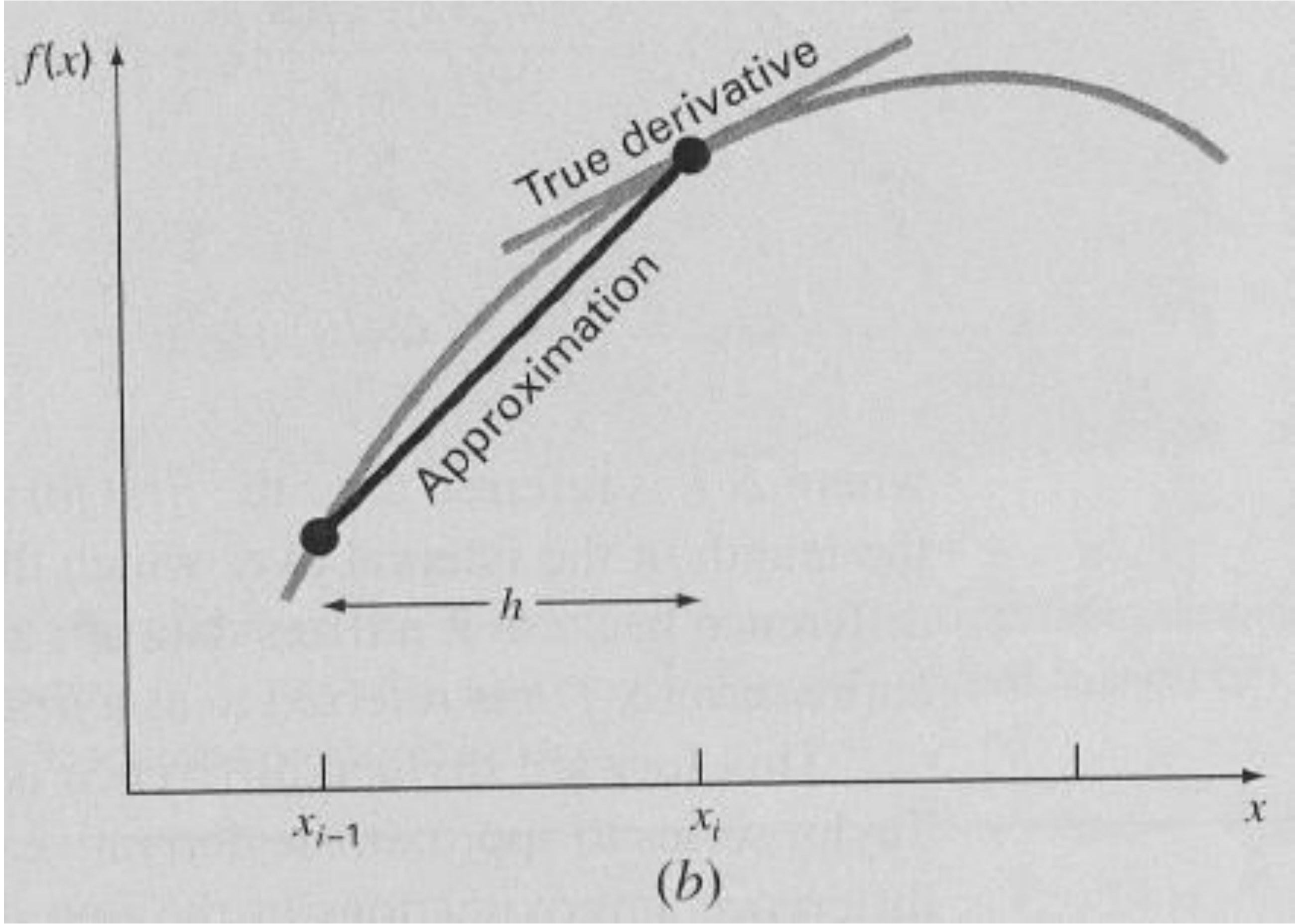
Rata-rata error adalah 0.0737486

Metode Selisih Mundur

- Rumus Differensiasi Numerik

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Metode Selisih Mundur



Metode Selisih Mundur

Uraikan $f(x_{i-1})$ di sekitar x_i :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) \overset{-}{+} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + h^2/2\, f_i'' + \ldots \qquad \text{(P.7.6)}$$

$$hf_i' = f_i - f_{i-1} + h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - h/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = -\,h/2\, f''(t)$, $x_{i-1} < t < x_i$

Metode Selisih Mundur

- Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_{-1} persamaan rumusnya menjadi:

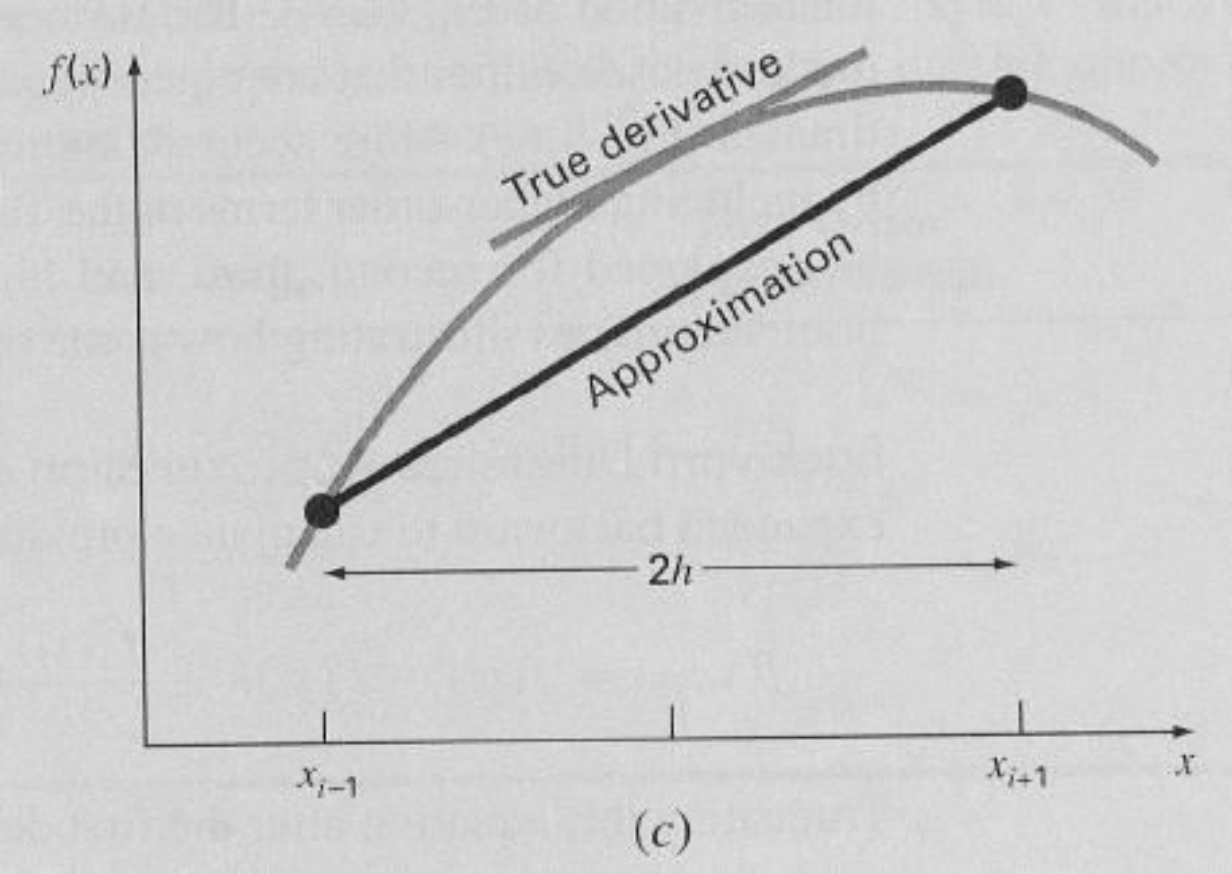
$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h/2\, f''(t)$, $x_{i+1} < t < x_i$.

Metode Selisih Tengahan

- Metode selisih tengahan merupakan metode pengambilan perubahan dari dua titik sekitar dari titik yang diukur.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



Metode Selisih Tengahan

Kurangkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6):

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$2hf_i' = f_{i+1} - f_{i-1} - h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - h^2/6\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h^2/6\, f'''(t), \quad x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(P.7.8)}$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h/6\, f'''(t), \quad x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

Metode Selisih Tengahan

- Kesalahan pada metode ini $$E(f) = -\frac{h^2}{6} f^{111}(\eta)$$

- Perhatikan bahwa pendekatan metode selisih tengahan lebih baik daripada dua pendekatan sebelumnya, sebab orde errornya adalah $O(h^2)$

Contoh

- Hitung differensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f′(x)	eksak	error
0	1	1.00083	1	0.000833125
0.05	1.04754	0.90333	0.902499	0.000831131
0.1	1.09033	0.810809	0.809984	0.000825373
0.15	1.12862	0.723237	0.722421	0.000816238
0.2	1.16266	0.640558	0.639754	0.000804089
0.25	1.19268	0.562701	0.561911	0.000789273
0.3	1.21893	0.489576	0.488804	0.000772113
0.35	1.24164	0.421082	0.420329	0.000752913
0.4	1.26103	0.357103	0.356371	0.00073196
0.45	1.27735	0.297514	0.296804	0.000709519
0.5	1.29079	0.24218	0.241494	0.000685839
0.55	1.30156	0.190961	0.1903	0.00066115
0.6	1.30988	0.143707	0.143071	0.000635667
0.65	1.31594	0.100267	0.0996572	0.000609585
0.7	1.31991	0.0604834	0.0599004	0.000583086
0.75	1.32198	0.0241983	0.023642	0.000556336
0.8	1.32233	-0.00874888	-0.00927837	0.000529485
0.85	1.32111	-0.0385191	-0.0390218	0.000502671
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.0657492	0.000476018
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.0896204	0.000449637
1	1.30956	-0.11037	-0.110794	0.000423628

Rata-rata error = 0.000665659

Differensiasi tingkat tinggi

- Differensiasi tingkat tinggi merupakan proses pendifferensialan secara terus-menerus, hingga tingkatan yang ditentukan.
- Differensial tingkat 2 $f''(x) = f'\{f'(x)\}$
- Differensial tingkat 3 $f^{(3)}(x) = f'\{f''(x)\}$
- Differensial tingkat n $f^{(n)}(x) = f^{1}\{f^{n-1}(x)\}$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right\}$$

Differensiasi tingkat tinggi

- Differensiasi tingkat 2 untuk M. Selisih Maju

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Differensiasi tingkat tinggi

- Differensiasi tingkat 2 untuk M. Selisih Tengahan

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \dfrac{f(x) - f(x-2h)}{2h}}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$$

Rumus Turunan Kedua Metode Selisih Tengahan

Tambahkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6) di atas :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)} + \ldots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - h^2/12\, f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = -\, h^2/12\, f^{(4)}(t),\ x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} , x_0, dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_1}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{(P.7.9)}$$

yang dalam hal ini $O(h^2) = -\, h^2/12\, f^{(4)}(t),\ x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

Rumus Turunan Kedua Metode Selisih Mundur

Dengan cara yang sama seperti (a) di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini $O(h) = h f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di x_{-2} , x_{-1}, dan x_0 persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h), \qquad \text{(P.7.10)}$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

Rumus Turunan Kedua Metode Selisih Maju

- Dengan cara yang sama diperoleh

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = -h f''(t),\ x_i < t < x_{i+2}$

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = -h f''(t),\ x_1 < t < x_{i+2}$.

Contoh :

- Hitung differensial kedua dari $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f''(x)	eksak	error
0	1	-2	-2	1.38889e-007
0.05	1.04754	-1.90012	-1.90008	3.94861e-005
0.1	1.09033	-1.80071	-1.80063	7.51525e-005
0.15	1.12862	-1.70219	-1.70209	0.000107067
0.2	1.16266	-1.60496	-1.60482	0.000135436
0.25	1.19268	-1.50934	-1.50918	0.000160461
0.3	1.21893	-1.41564	-1.41546	0.000182341
0.35	1.24164	-1.32413	-1.32393	0.000201271
0.4	1.26103	-1.23503	-1.23481	0.000217443
0.45	1.27735	-1.14853	-1.1483	0.000231042
0.5	1.29079	-1.0648	-1.06456	0.000242248
0.55	1.30156	-0.983979	-0.983728	0.000251235
0.6	1.30988	-0.906166	-0.905908	0.000258172
0.65	1.31594	-0.831448	-0.831184	0.000263221
0.7	1.31991	-0.759885	-0.759619	0.000266538
0.75	1.32198	-0.691519	-0.691251	0.000268271
0.8	1.32233	-0.62637	-0.626101	0.000268564
0.85	1.32111	-0.564441	-0.564173	0.000267551
0.9	1.31848	-0.505721	-0.505456	0.000265362
0.95	1.31458	-0.450184	-0.449921	0.00026212
1	1.30956	-0.39779	-0.397532	0.000257939

Rata-rata error = 0.000201003

Contoh

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

(a) Hitunglah $f'(1.7)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$

(b) Hitunglah $f'(1.4)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$

(c) Rumus apa yang digunakan untuk menghitung $f'(1.3)$ dan $f'(2.5)$?

Contoh

(a) Orde $O(h^2)$:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Ambil titik-titik $x_{-1} = 1.5$ dan $x_1 = 1.9$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di tengah keduanya dengan $h = 0.2$.

$$f'(1.7) = \frac{6.686 - 4.482}{2(0.2)} = 5.510 \qquad \text{(empat angka bena)}$$

Orde $O(h^4)$:

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_2}{12h}$$

Ambil titik-titik $x_{-2} = 1.3$ dan $x_{-1} = 1.5$, $x_1 = 1.9$, dan $x_2 = 2.1$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di pertengahannya.

$$f'(1.7) = \frac{-8.166 + 8(6.686) - 8(4.482) + 3.669}{12(0.2)}$$

$$= 5.473 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

Contoh

(b) Orde $O(h^2)$:

Ambil titik-titik $x_{-1} = 1.3$ dan $x_1 = 1.5$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.4$ terletak di tengahnya dan $h = 0.1$.

$$f'(1.4) = \frac{4.482 - 3.669}{2(0.1)} = 4.065 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

(c) Untuk menghitung $f'(1.3)$ digunakan rumus hampiran selisih-maju, sebab $x = 1.3$ hanya mempunyai titik-titik sesudahnya (maju), tetapi tidak memiliki titik-titik sebelumnya. Sebaliknya, untuk menghitung nilai $f'(2.5)$ digunakan rumus hampiran selisih-mundur, sebab $x = 2.5$ hanya mempunyai titik-titik sebelumnya (mundur).

Hampiran selisih-maju :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(1.3) = \frac{4.482 - 3.669}{0.2} = 4.065$$

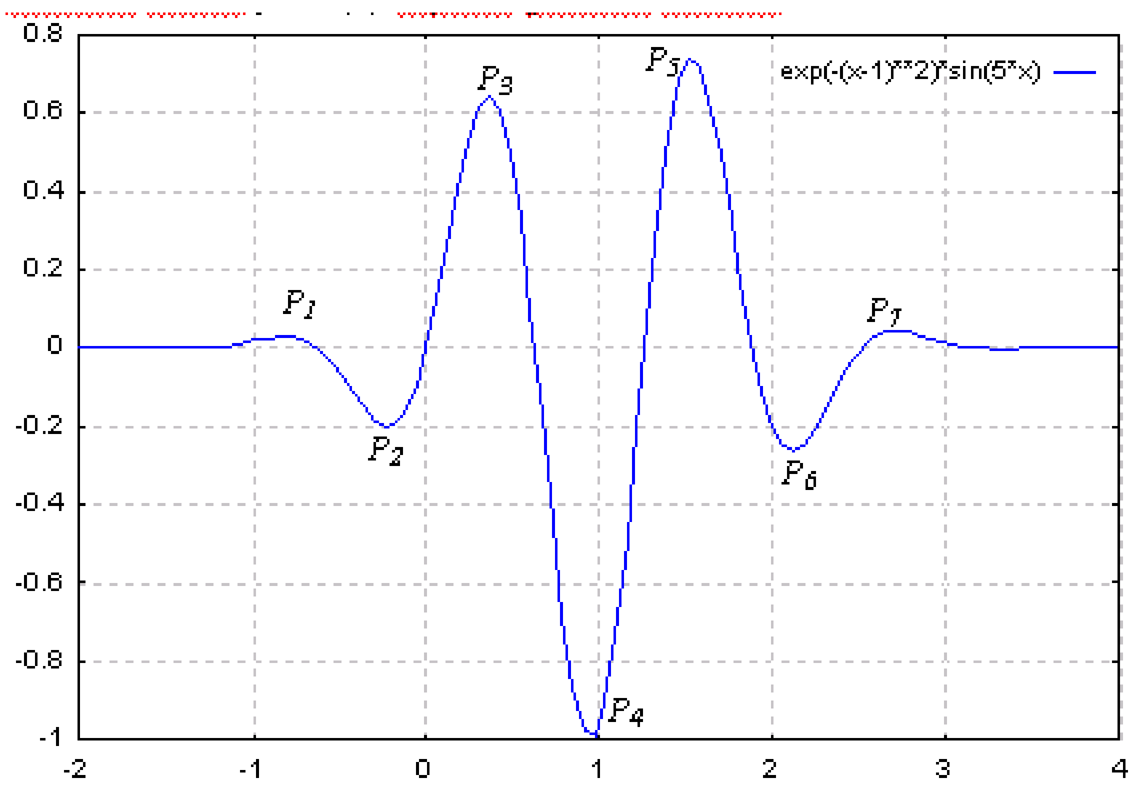
Contoh

Hampiran selisih-mundur :

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

$$f'(2.5) = \frac{12.182 - 9.974}{0.2} = 11.04$$

Pemakaian Differensiasi Untuk Menentukan Titik Puncak Kurva



Kurva tersebut mempunyai 7 titik puncak, yaitu dan .Titik puncak dan dinamakan titik puncak maksimum.Titik puncak dan dinamakan titik puncak minimum.

Pemakaian Differensiasi Untuk Menentukan Titik Puncak Kurva

- **Definisi 1.**

  Suatu titik a pada kurva y = f(x) dinamakan titik puncak bila dan hanya bila : $f^{1}(a) = 0$.

- **Definisi 2.**

  Sebuah titik puncak a dikatakan titik maksimum pada kurva y = f(x) bila : $f^{11}(a) < 0$.

- **Definisi 3.**

  Sebuah titik puncak a dikatakan titik minimum pada kurva y = F(x) bila : $f^{11}(a) > 0$.

Contoh :

- Tentukan titik-titik puncak dari kurva $y = x^3-2x^2-x$ dengan mengambil range

0	1	1.00083	-2
0.05	1.04754	0.90333	-1.90012
0.1	1.09033	0.810809	-1.80071
0.15	1.12862	0.723237	-1.70219
0.2	1.16266	0.640558	-1.60496
0.25	1.19268	0.562701	-1.50934
0.3	1.21893	0.489576	-1.41564
0.35	1.24164	0.421082	-1.32413
0.4	1.26103	0.357103	-1.23503
0.45	1.27735	0.297514	-1.14853
0.5	1.29079	0.24218	-1.0648
0.55	1.30156	0.190961	-0.983979
0.6	1.30988	0.143707	-0.906166
0.65	1.31594	0.100267	-0.831448
0.7	1.31991	0.0604834	-0.759885
0.75	**1.32198**	**0.0241983**	**-0.691519**
0.8	**1.32233**	**-0.008748**	**-0.62637**
0.85	1.32111	-0.038519	-0.564441
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.505721
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.450184
1	1.30956	-0.11037	-0.39779

Terlihat bahwa nilai puncak terjadi antara 0.75 dan 0.8, karena nilai f'(x) mendekati nol. Pada nilai tersebut terlihat nilai f"(x)<0 maka nilai puncak tersebut adalah nilai puncak maksimum.