Integrasi Numerik

Umi Sa'adah
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2012

Topik

- Integral Reimann
- Trapezoida
- Simpson 1/3
- Simpson 3/8
- Kuadratur Gauss 2 titik
- Kuadratur Gauss 3 titik

INTEGRASI NUMERIK

- Di dalam kalkulus, terdapat dua hal penting yaitu integral dan turunan(derivative)
- Pengintegralan numerik merupakan alat atau cara yang digunakan oleh ilmuwan untuk memperoleh jawaban hampiran (aproksimasi) dari pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.

INTEGRASI NUMERIK

- Fungsi yang dapat dihitung integralnya :

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\tfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \tfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln|x|dx = x\ln|x| - x + C$$

- Fungsi yang rumit misal :

$$\int_0^2 \frac{2+\cos(1+x^{3/2})}{\sqrt{1+0.5\sin x}} e^{0.5x} dx$$

INTEGRASI NUMERIK

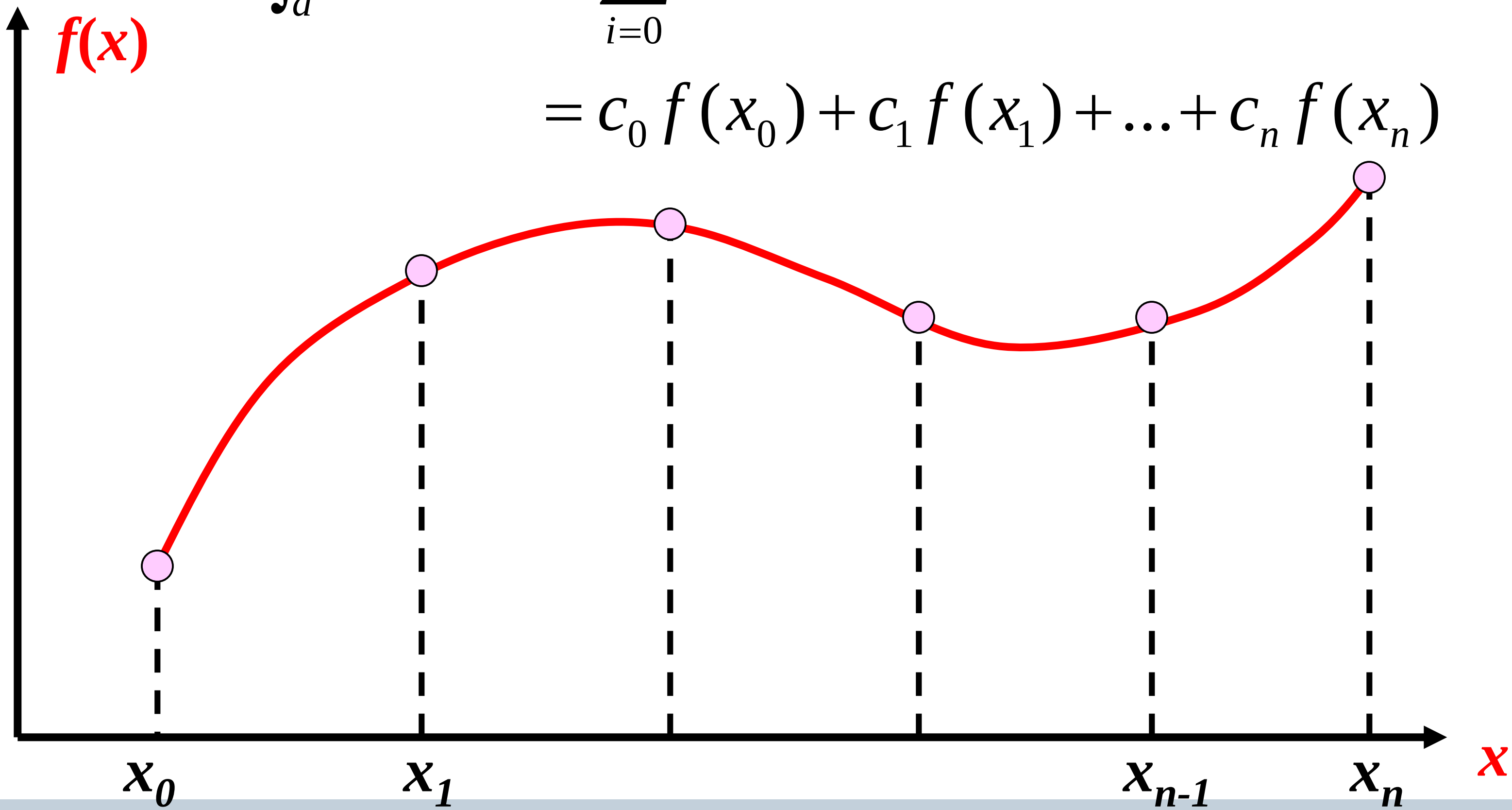
- Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan.
- digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi y = f(x) dan sumbu x.
- Penerapan integral : menghitung luas dan volume-volume benda putar

Dasar Pengintegralan Numerik

- **Penjumlahan berbobot dari nilai fungsi**

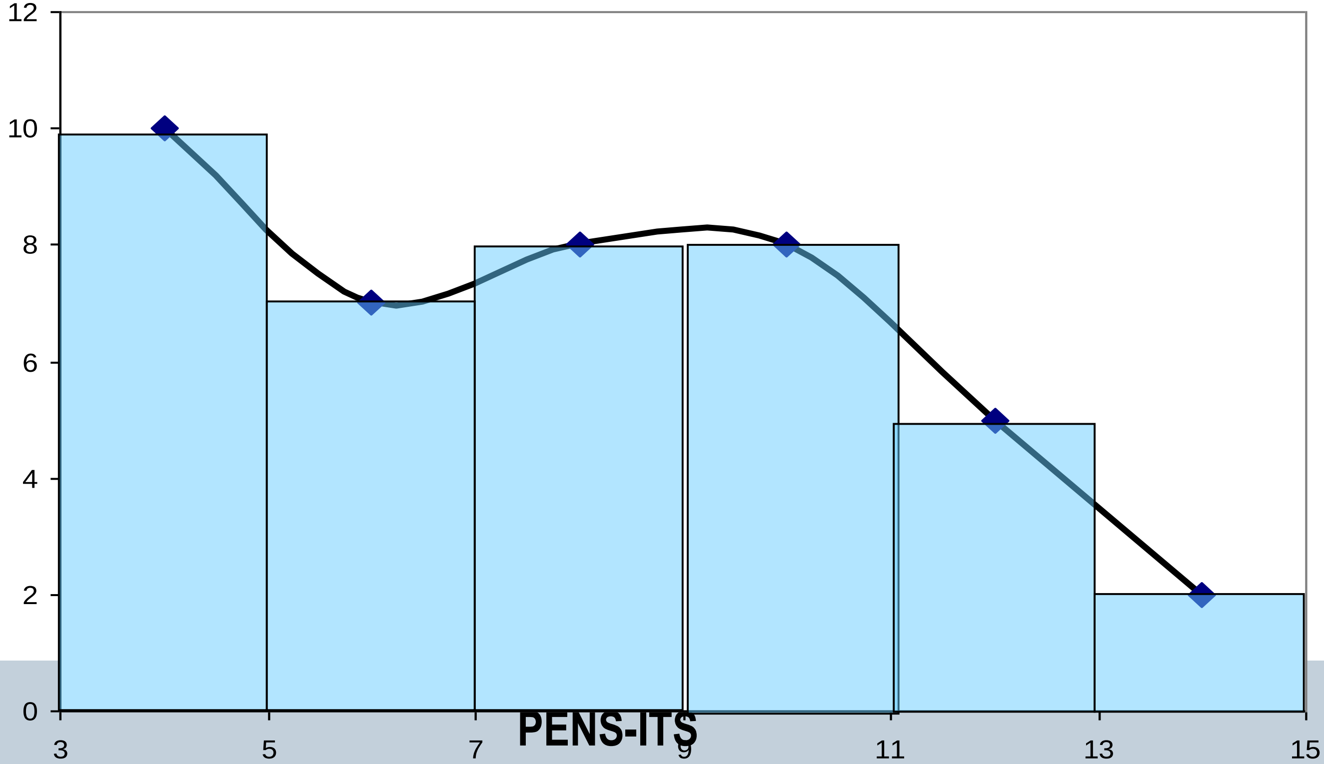
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n)$$



Dasar Pengintegralan Numerik

- Melakukan penginteralan pada bagian-bagian kecil, seperti saat awal belajar integral – penjumlahan bagian-bagian.
- Metode Numerik hanya mencoba untuk lebih cepat dan lebih mendekati jawaban eksak.



Dasar Pengintegralan Numerik

Formula Newton-Cotes

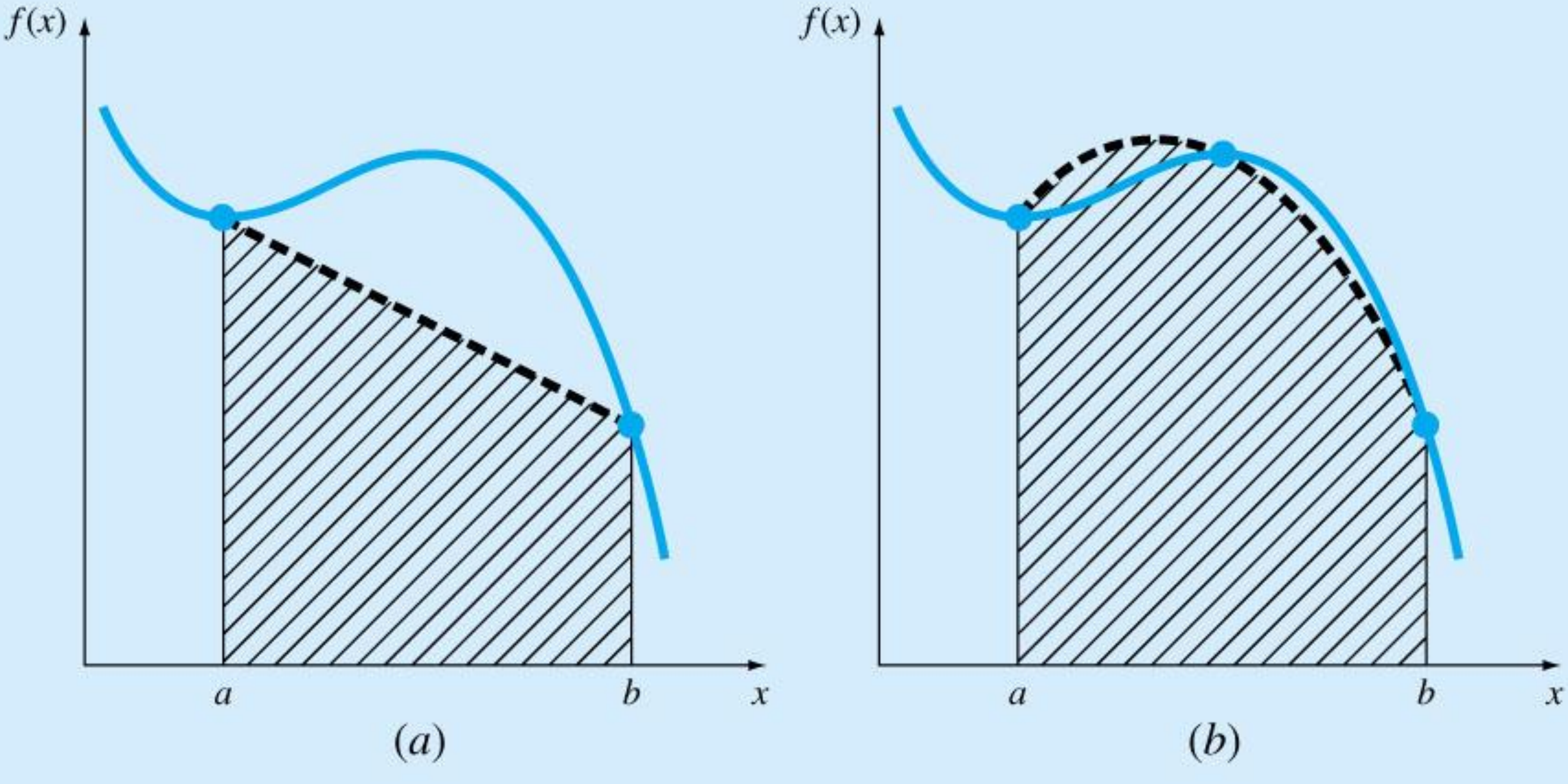
- Berdasarkan pada

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

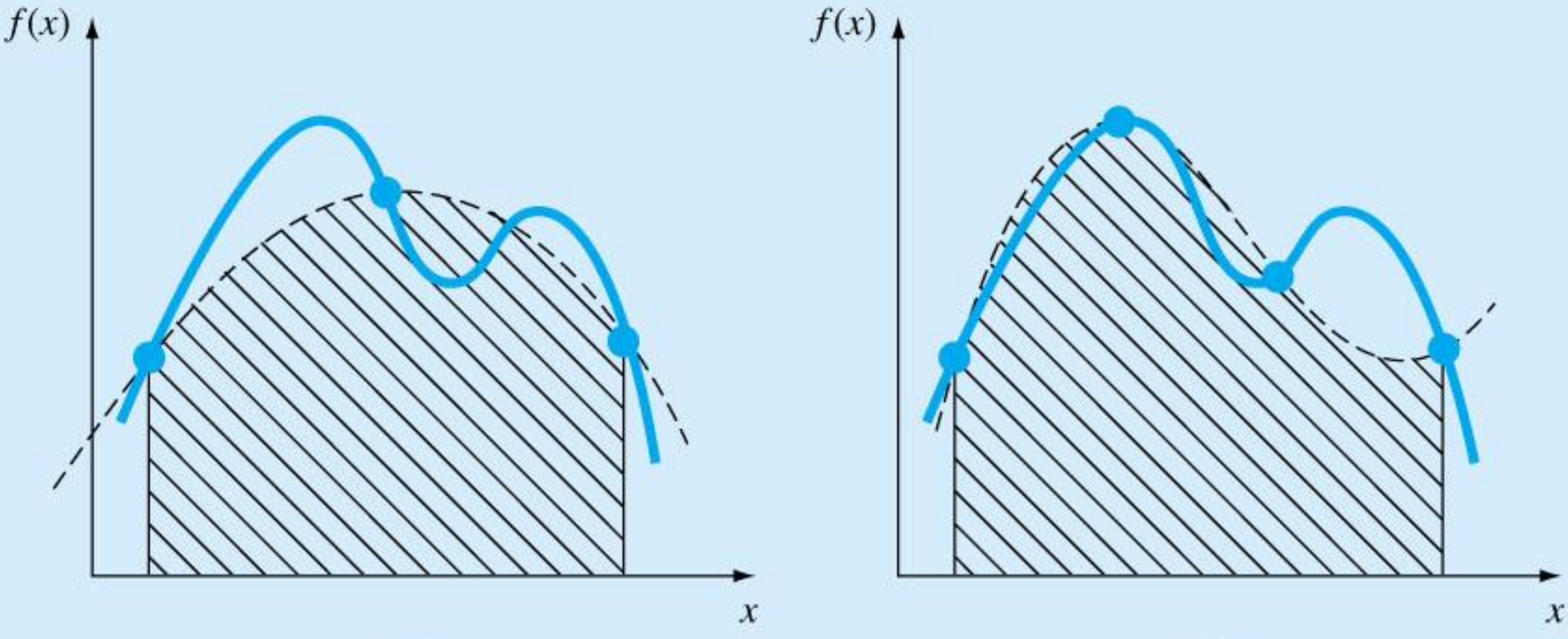
➤ Nilai hampiran ***f***(*x*) dengan polinomial

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

- $f_n(x)$ bisa fungsi linear
- $f_n(x)$ bisa fungsi kuadrat

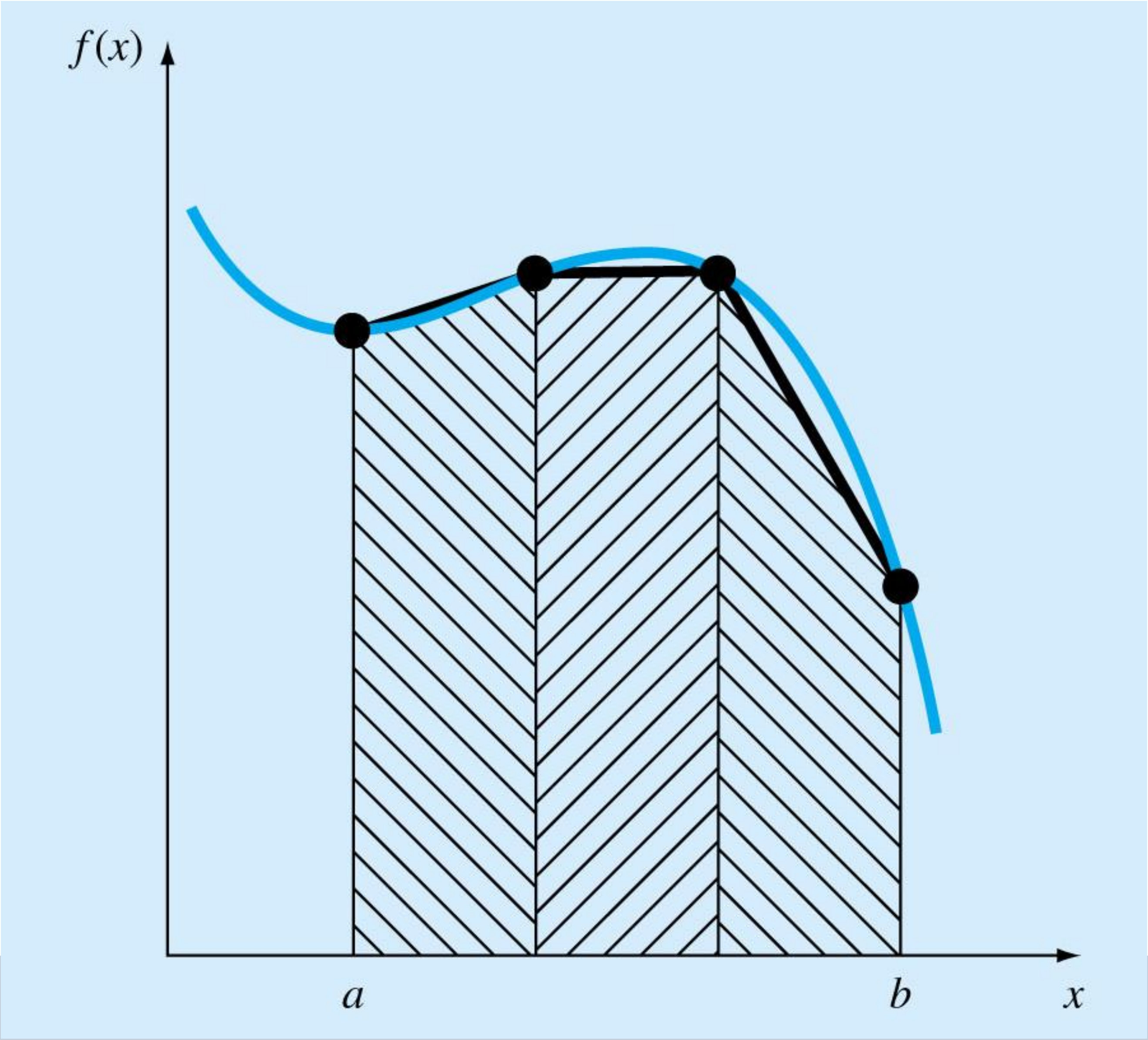


- $f_n(x)$ bisa juga fungsi kubik atau polinomial yang lebih tinggi



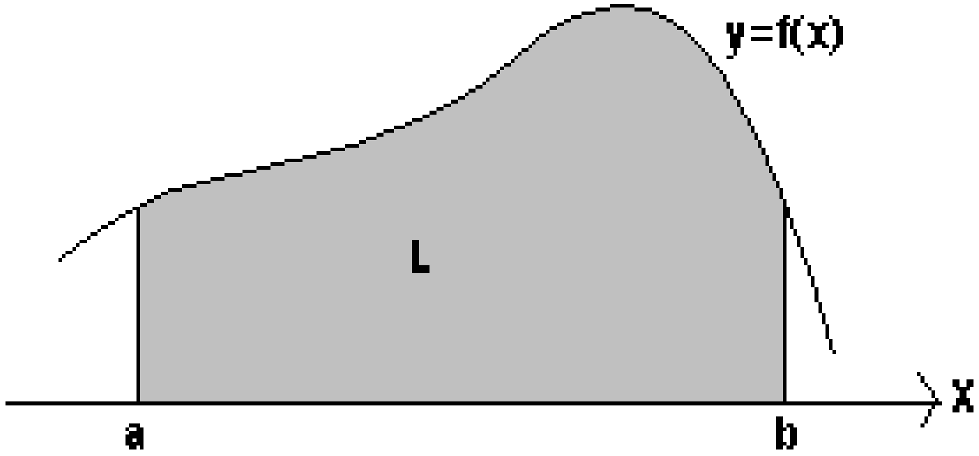
(a) (b)

➢ Polinomial dapat didasarkan pada data

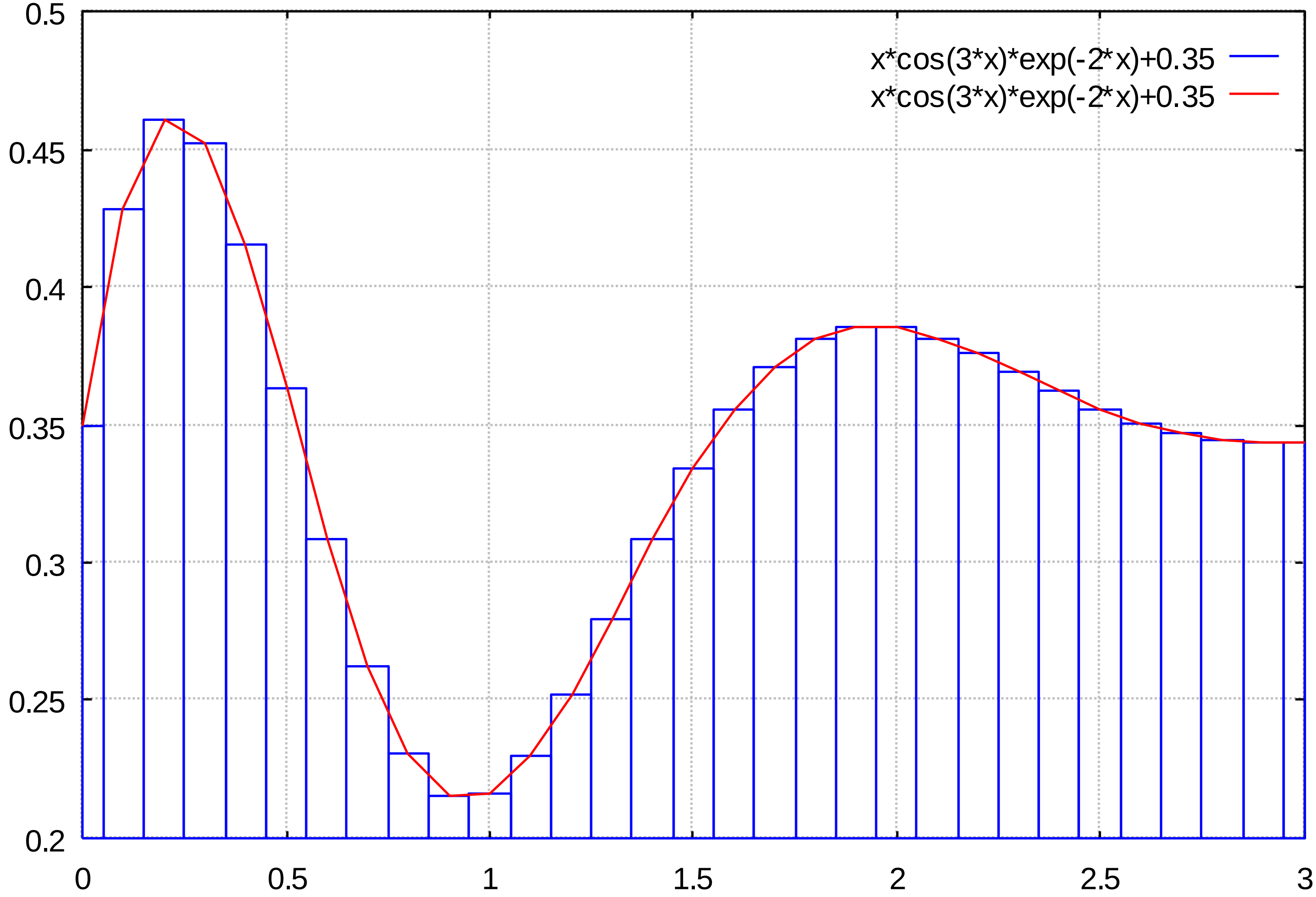


INTEGRASI NUMERIK

- Luas daerah yang diarsir L dapat dihitung dengan :
- L = $\int_a^b f(x)dx$



Metode Integral Reimann



Metode Integral Reimann

- Luasan yang dibatasi y = f(x) dan sumbu x
- Luasan dibagi menjadi N bagian pada range x = [a,b]
- Kemudian dihitung Li : luas setiap persegi panjang dimana $Li = \Delta xi . f(xi)$

Metode Integral Reimann

- Luas keseluruhan adalah jumlah Li dan dituliskan :

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + .. + L_n$$
$$= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_3$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

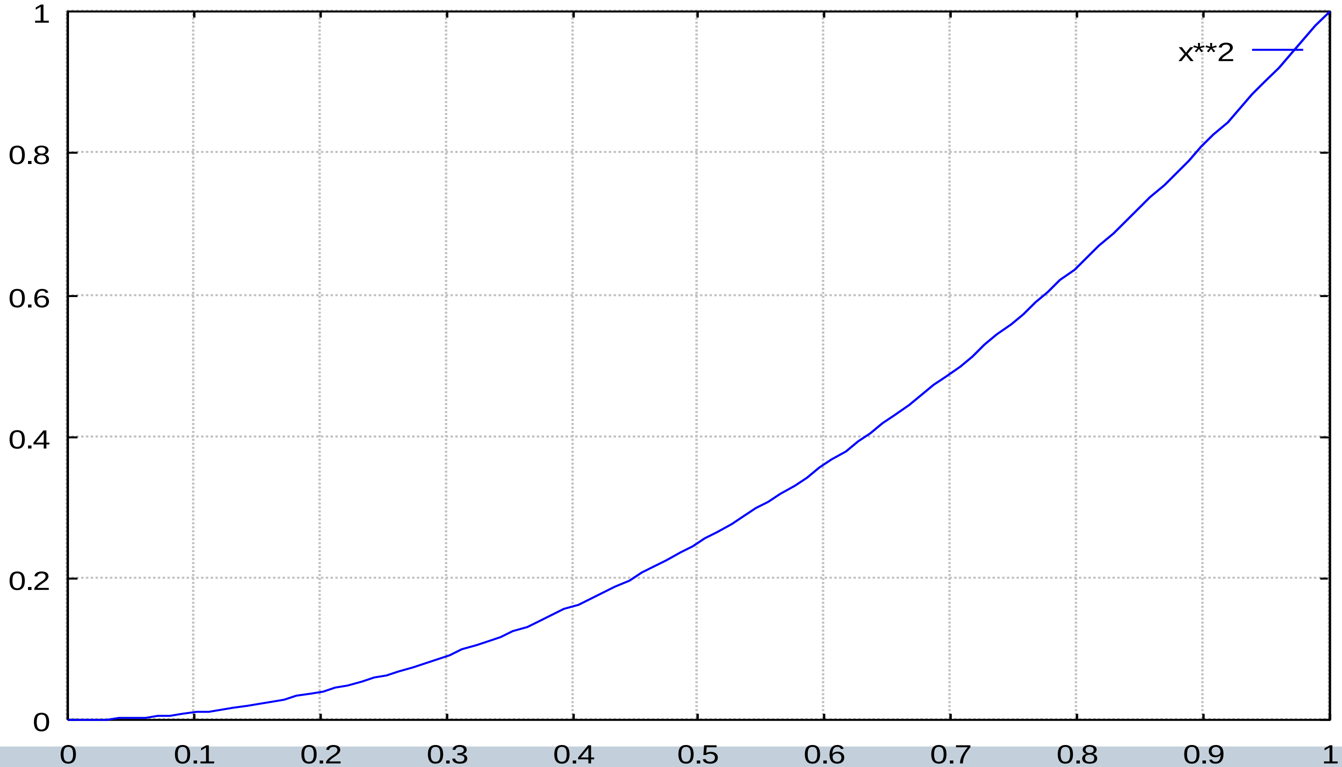
- Dimana $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = h$
- Didapat

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Contoh

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

- Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x untuk range x = [0,1]



Contoh

- Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00)$$

$$= (0.1)(3,85) = 0,385$$

- Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0,3333.....$
- Terdapat kesalahan e = 0,385-0,333
- = 0,052

Algoritma Metode Integral Reimann

- Definisikan fungsi f(x)
- Tentukan batas bawah dan batas ata integrasi
- Tentukan jumlah pembagi area N
- Hitung h=(b-a)/N
- Hitung

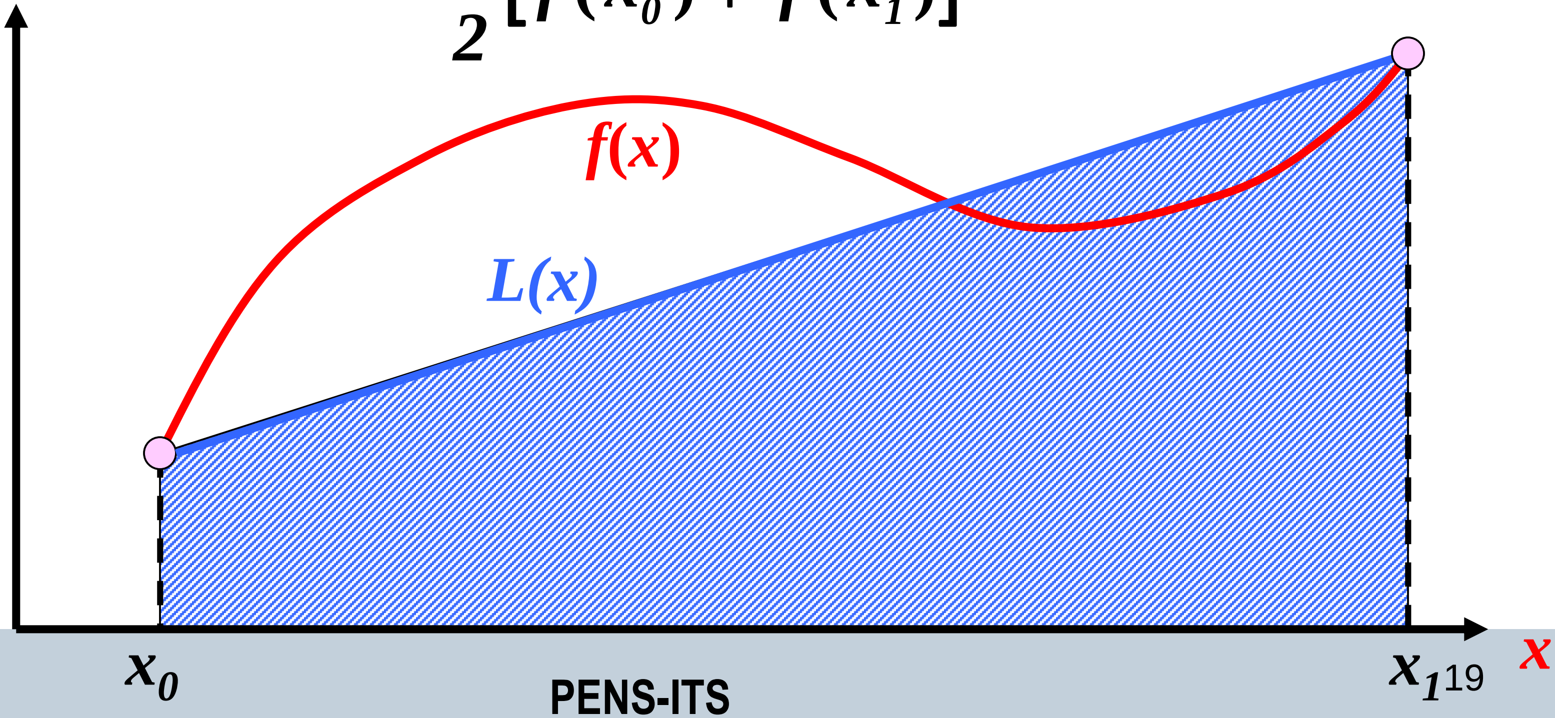
$$L = h.\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$$

Metode Integrasi Trapezoida

- **Aproksimasi garis lurus (linier)**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$



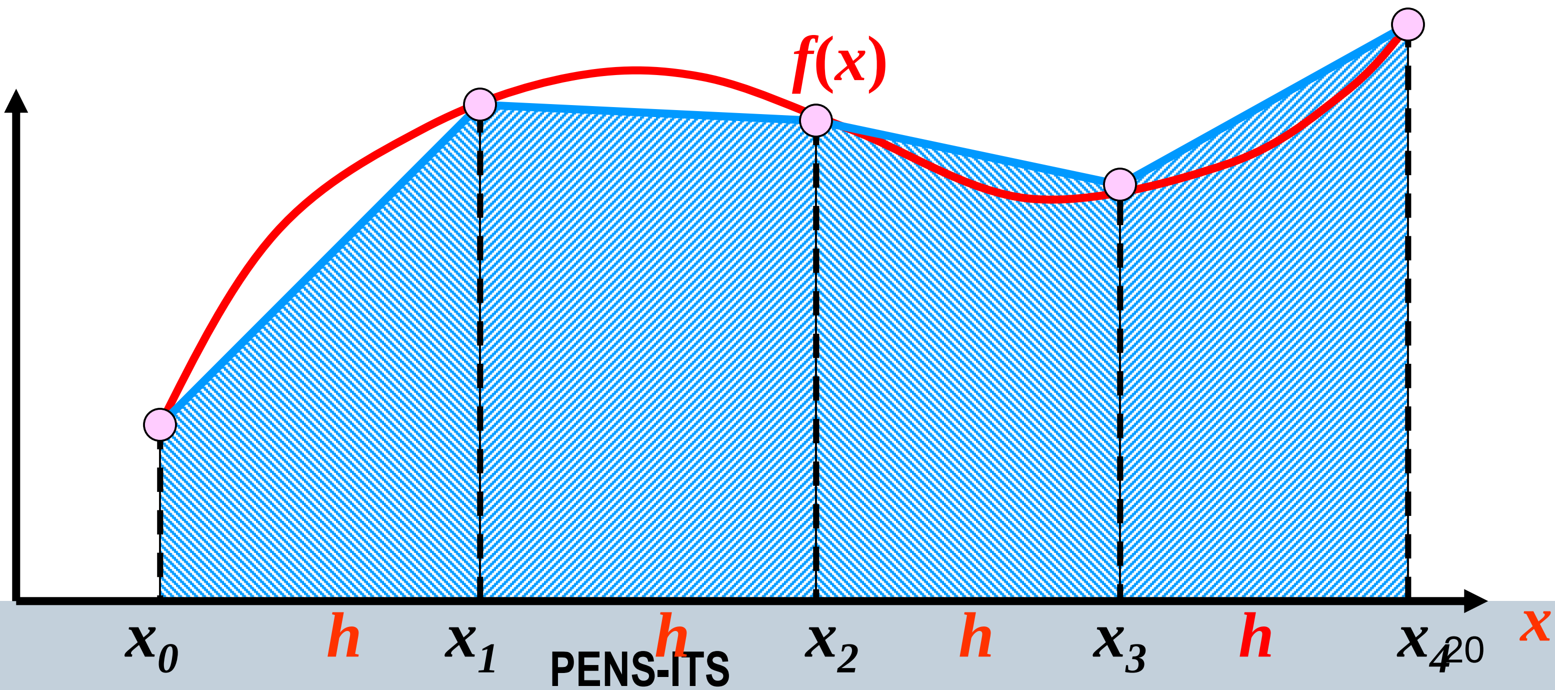
Aturan Komposisi Trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$



Metode Integrasi Trapezoida

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).\Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right).\Delta x_i$$

$$L = \sum_{i=0}^{\eta-1} L_i$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

Algoritma Metode Integrasi Trapezoida

- Definisikan y=f(x)
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Tentukan jumlah pembagi n
- Hitung h=(b-a)/n
- Hitung

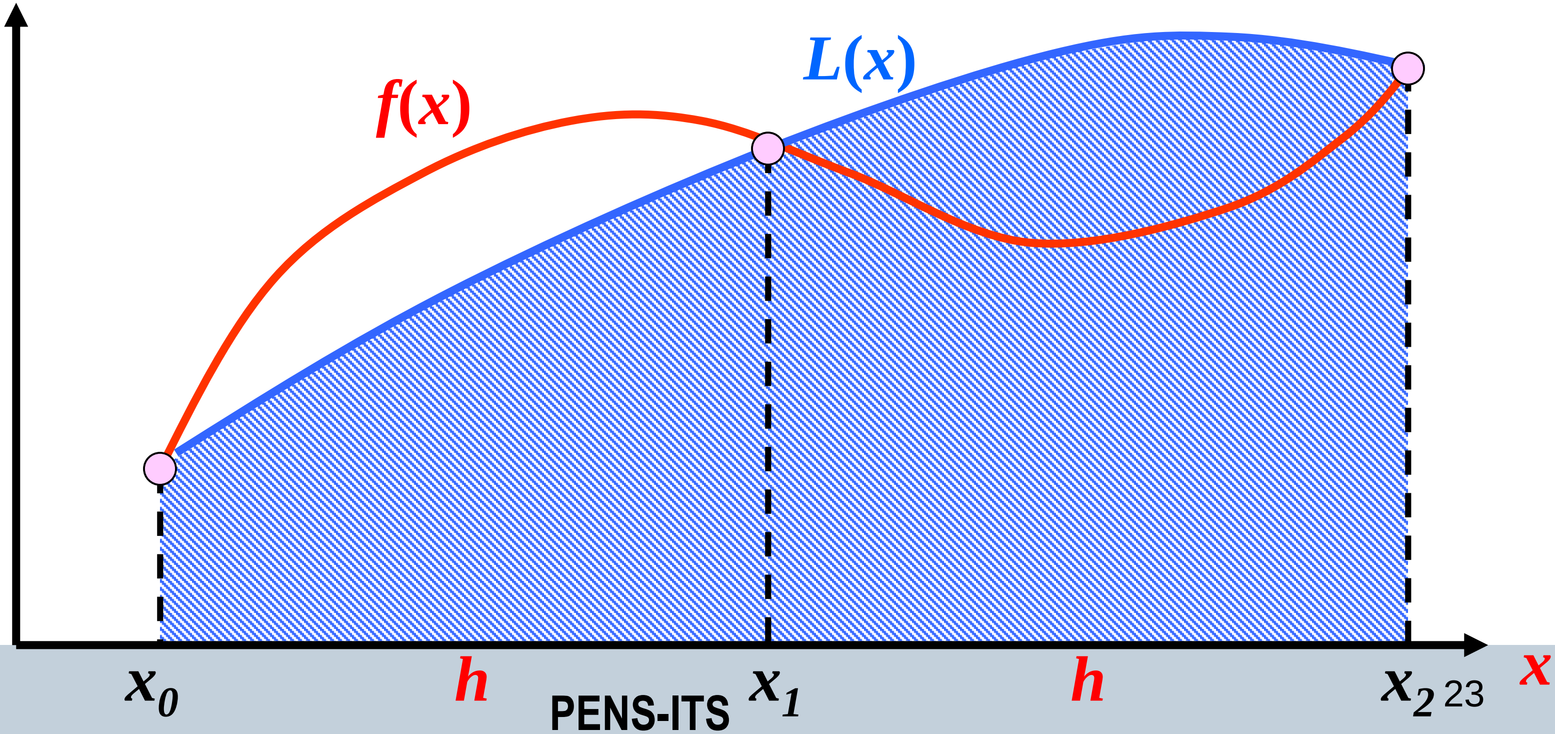
$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

Aturan Simpson 1/3

- **Aproksimasi dengan fungsi parabola**

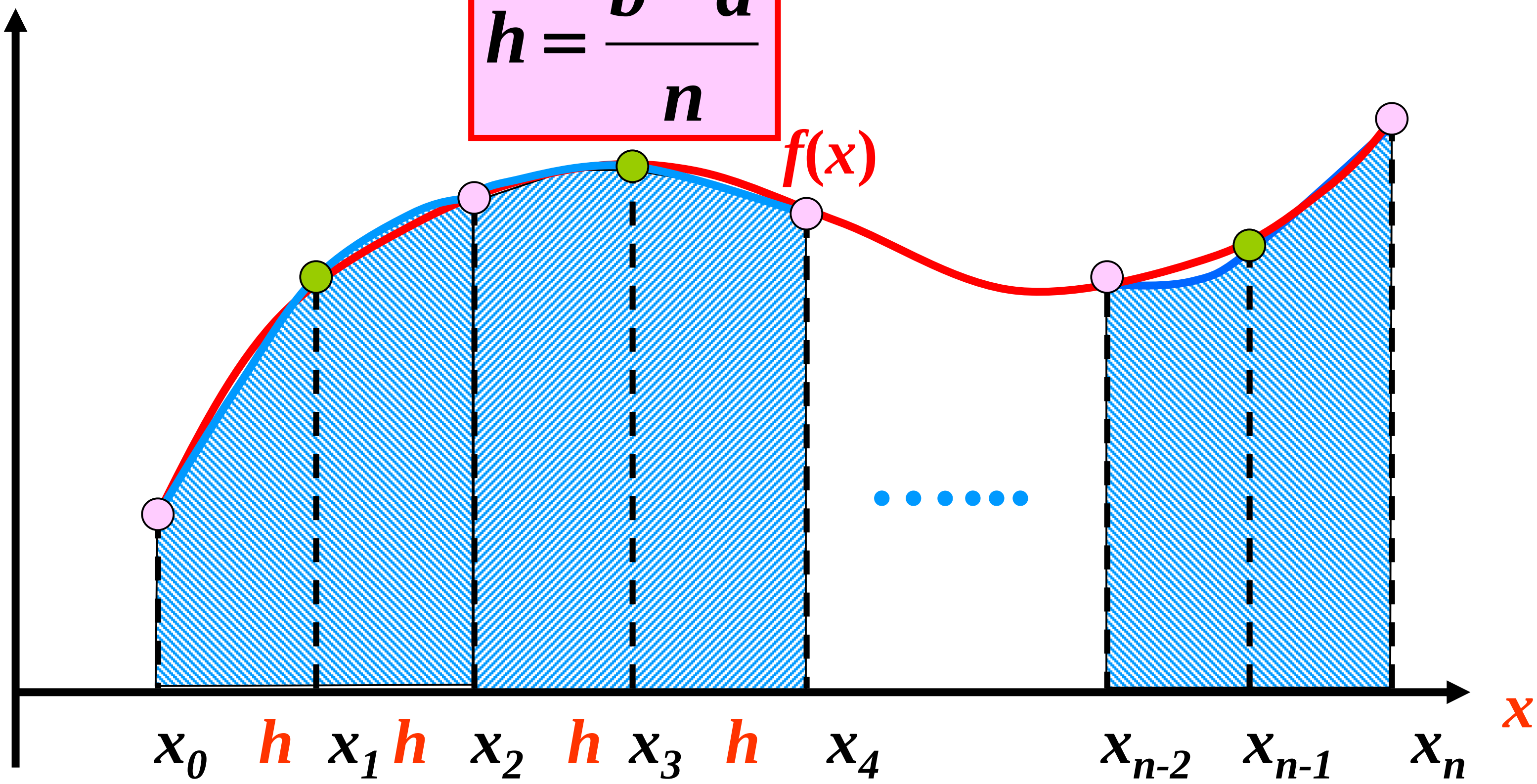
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$



Aturan Komposisi Simpson

$$h = \frac{b-a}{n}$$



Cara II

(Buku Rinaldi Munir)

- Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga titik tsb

$$p_2 x = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

Polinom Interpolasi Newton Gregory

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

Lambang Δ menyatakan selisih maju. Arti setiap simbol di dalam tabel adalah:

$$f_0 = f(x_0) = y_0$$
$$f_1 = f(x_1) = y_1$$
$$\ldots$$
$$f_4 = f(x_4)$$

Notasi: $f_p = f(x_p)$

Polinom Interpolasi Newton Gregory

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$

$\Delta f_1 = f_2 - f_1$

...

$\Delta f_3 = f_4 - f_3$

Notasi: $\Delta f_p = f_{p+1} - f_p$

$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$

$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta \mathrm{f}$

$\Delta^2 f_2 = \Delta f_3 - \Delta f_2$

Notasi: $\Delta^2 f_p = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$

$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$

$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$

Notasi: $\Delta^3 f_p = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f^p$

Bentuk Umum

$$\Delta^{n+1} f_p = \Delta^n f_{p+1} - \Delta^n f_p , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cara II (Buku Rinaldi Munir hlm 285)

- Integrasikan p2(x) pd selang [0,2h]

$$L = \int_0^{2h} f(x)dx = \int_0^{2h} p_2 x dx$$

$$L = \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 \right) dx$$

$$L = f_0 x + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h} \right)\Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$L = 2hf_0 + \frac{4h^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h} \right)\Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h \right)\Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0$$

Cara II (Buku Rinaldi Munir hlm 286)

- Mengingat

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

- Maka selanjutnya

$$L = 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$L = 2hf_0 + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3} f_2 - \frac{2h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_0$$

$$L = \frac{h}{3} f_0 + \frac{4h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_2$$

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Kaidah Simpson 1/3 (total)

$$L_{total} = \int_a^b f(x)dx = \int_{x0}^{x2} f(x)dx + \int_{x2}^{x4} f(x)dx + \ldots + \int_{xn-2}^{xn} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n)$$

- Disyaratkan jumlah pias (n) harus genap

Metode Integrasi Simpson 1/3

- Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

N = 0 – n

L = L1 + L2 + L3 + . . . + Ln

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{h}{3}(f_4 + 4f_5 + f_6) + \ldots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

- atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i\,ganjil} f_i + 2\sum_{i\,genap} f_i + f_n \right)$$

- Disyaratkan jml pias (n) genap

Contoh

- Hitung integral $\int_0^1 2x^3 dx$

$$L_{total} \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n\right)$$

L_{total} = 0.1/3*(f(0) + 4*f(1) + 2*f(2) + …+ 4*f(9) + f(10))

= 0.1/3*(0+0.008+0.032+0.216+0.256+1+0.864

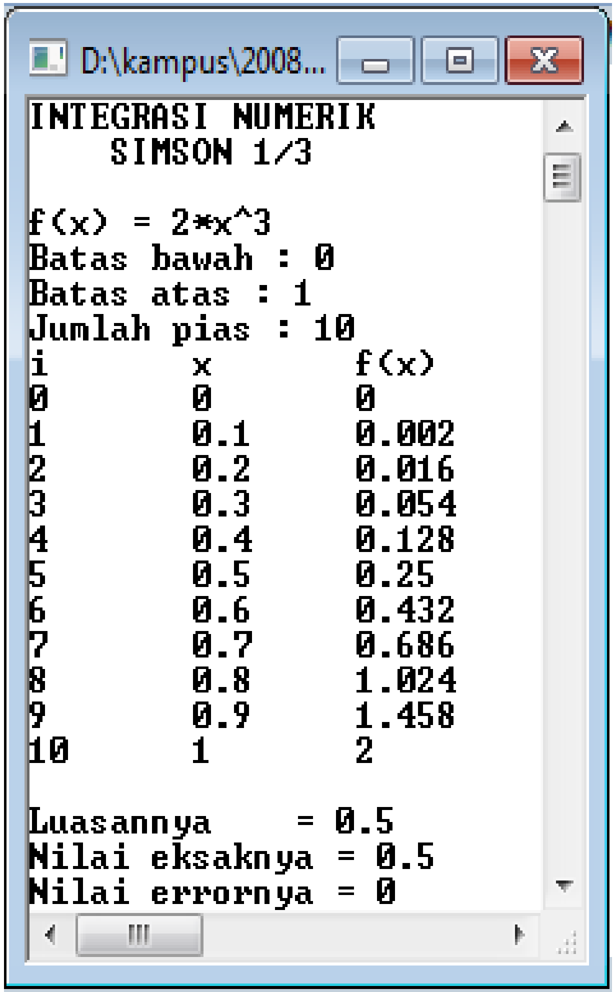
+2.744+2.048+5.832+2)

= 0.0333333 * 15

= 0.5

Nilai eksak = $\frac{1}{2} x^4 \Big|_1^0$ = 0.5

Nilai error = 0.5 - 0.5 = 0



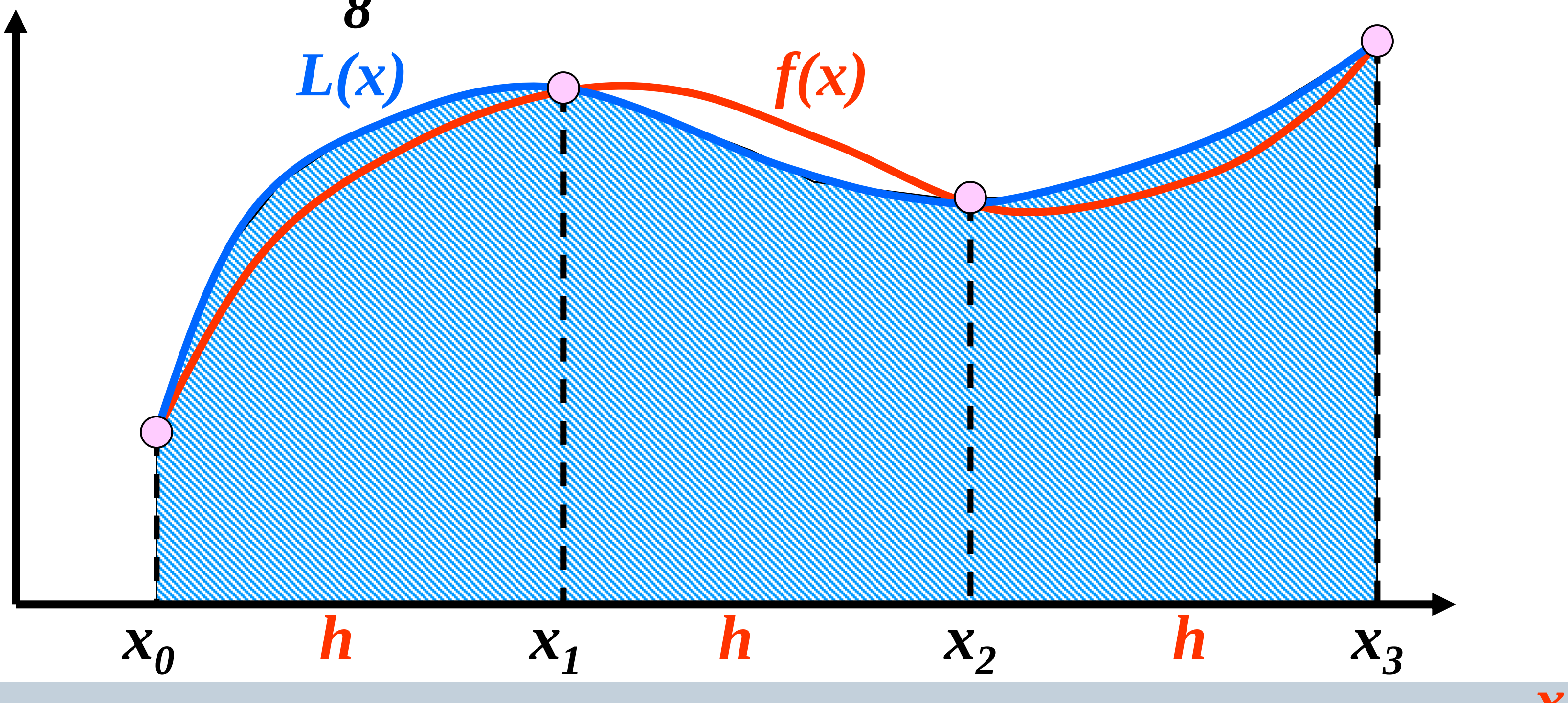
```
INTEGRASI NUMERIK
    SIMSON 1/3

f(x) = 2*x^3
Batas bawah : 0
Batas atas : 1
Jumlah pias : 10
i          x         f(x)
0          0         0
1          0.1       0.002
2          0.2       0.016
3          0.3       0.054
4          0.4       0.128
5          0.5       0.25
6          0.6       0.432
7          0.7       0.686
8          0.8       1.024
9          0.9       1.458
10         1         2

Luasannya      = 0.5
Nilai eksaknya = 0.5
Nilai errornya = 0
```

Aturan Simpson 3/8

➢ **Aproksimasi dengan fungsi kubik**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$



Metode Integrasi Simpson 3/ 8

- Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

N = 0 – n

L = L1 + L2 + L3 + . . . + Ln

$$L = \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right) + \frac{3}{8}h\left(f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6\right) + \frac{3}{8}h + \ldots + \frac{3}{8}h\left(f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

- atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{3}{8}h\left(f_0 + 2\sum_{i\%3=0}^{n-1} fi + 3\sum_{i\%3!=0}^{n-1} fi + f_n\right)$$

Latihan Soal

- Hitung Integral dengan menggunakan

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$$

  - Integral Reimann
  - Integrasi Trapezoida
  - Integrasi Simpson 1/3 dan 3/8

Metode Integrasi Gauss

- Metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson) → berdasarkan titik-titik data diskrit. Dengan batasan :
  - h sama
  - Luas dihitung dari a sampai b
- Mengakibatkan error yang dihasilkan cukup besar.

Metode Integrasi Gauss

- Misal menghitung Luas dengan metode trapezoida dengan selang [-1,1]

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) \approx f(1) + f(-1)$$

$$h = 1 - (-1) = 2$$

- Persamaan ini dapat ditulis (disebut pers Kuadratur Gauss)

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

- Misal x_1=-1, x_2=1 dan c_1=c_2=h/2=1 → menjadi metode trapezoida
- Karena x_1, x_2,c_1 dan c_2 sembarang maka kita harus memilih nilai tersebut sehingga error integrasinya minimum

Metode Integrasi Gauss

- Bagaimana mencari x_1, x_2, c_1 dan c_2 ? Karena ada 4 perubah yang tidak diketahui, maka harus ada 4 persamaan simultan yang mengandung x_1, x_2, c_1 dan c_2.
- Dapat dilihat bahwa nilai integrasi numerik dengan metode trapesium akan tepat (error = 0) untuk <u>fungsi tetap</u> dan <u>fungsi linier</u>.
- Misalnya persamaan-persamaan di bawah ini dijadikan fungsi integral pada interval integrasi [-1, 1]
- $f(x) = 1$; $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$

Metode Integrasi Gauss

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = x \,|_{x=-1}^{x=1} = 1 - (-1) = 2 = c1 + c2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = \tfrac{1}{2} x^2 \,|_{x=-1}^{x=1} = \tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{2}(-1)^2 = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \tfrac{1}{3} x^3 \,|_{x=-1}^{x=1} = \tfrac{1}{3}(1)^3 - \tfrac{1}{3}(-1)^3 = \tfrac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = \tfrac{1}{4} x^4 \,|_{x=-1}^{x=1} = \tfrac{1}{4}(1)^4 - \tfrac{1}{4}(-1)^4 = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$$

Sekarang sudah didapatkan 4 persamaan simultan sbb :

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2} = 2/3$$

$$c_1 x_1^{\,3} + c_2 x_2^{\,3} = 0$$

apabila dipecahkan menghasilkan

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350269$$

$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -0.577350269$$

Sehingga :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{-1}{\sqrt{3}})$$

Metode Integrasi Gauss

- Persamaan dibawah ini dinamakan metode Gauss Legendre 2 titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = g(\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(\frac{-1}{\sqrt{3}})$$

- Dengan kaidah ini, menghitung integral *f(x)* di dalam selang[-1, 1] cukup hanya dengan mengevaluasi nilai fungsi *g* pada $x = 1/\sqrt{3}$ dan $x = -1/\sqrt{3}$

Transformasi

$$L_i = \int_a^b f(x)dx \longrightarrow L_i = \int_{-1}^{1} g(u)du$$

- Range [a,b] → [-1,1]
- x → u
- f(x) → g(u)
- dx → du

Transformasi

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{u+1}{2}$$

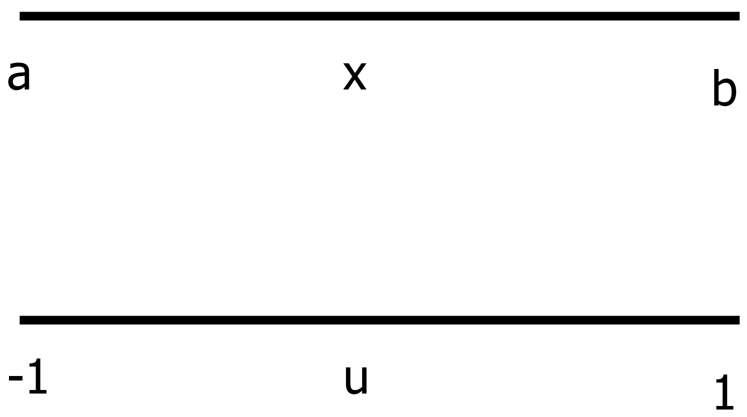
$$2x-2a=(u+1)(b-a)$$

$$2x=(u+1)(b-a)+2a$$

$$x=\frac{b-a+bu-au+2a}{2}$$

$$x=\frac{(b+a)}{2}+\frac{(b-a)}{2}u$$

$$dx=\frac{(b-a)}{2}du$$



Transformasi

$$L_i = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(u)du$$

$$g(u) = f\left(\frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u\right)\frac{(b-a)}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u\right)du$$

Analisa

- Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson 1/3, 3/8) metode Gauss-Legendre 2 titik lebih sederhana dan efisien dalam operasi aritmatika, karena hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi.
- Lebih teliti dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.
- Namun kaidah ini harus mentransformasi terlebih dahulu menjadi

$$\int_{-1}^{1} g(u)du$$

Algoritma

Integrasi Kuadratur Gauss

dgn Pendekatan 2 titik

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)

(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} u$$

(4) Tentukan fungsi f(u) dengan:

$$g(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} u \right)$$

(5) Hitung:

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah mengkonversi variabel x, dengan:

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} u$$

$$x = \frac{1}{2}(u+1)$$

Karena $f(x) = x^2 = (\frac{1}{2}(u+1))^2$

Dengan demikian diperoleh fungsi g(u):

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2 = \frac{1}{8}(u+1)^2$$

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0.311004 + 0.022329$$

$$= 0.33333$$

Metode Gauss Legendre 3 Titik

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Parameter x_1, x_2 , x_3 ,c_1 ,c_2 dan c_3 dapat dicari dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat (error = 0) untuk 6 buah fungsi berikut :

$$f(x) = 1; f(x) = x; f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^3; f(x) = x^4; f(x) = x^5$$

- Dengan cara yang sama dengan 2 titik didapatkan

$$c_1 = \frac{5}{9}; c_2 = \frac{8}{9}; c_3 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = -\sqrt{3/5} = -0.774596669$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{3/5} = 0.774596669$$

Metode Gauss Legendre 3 Titik

Sehingga rumus luasannya menjadi :

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Algoritma Metode Integrasi Gauss
dengan Pendekatan 3 Titik

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)

(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u$$

(4) Tentukan fungsi f(u) : $g(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u\right)$

(5) Hitung: $\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

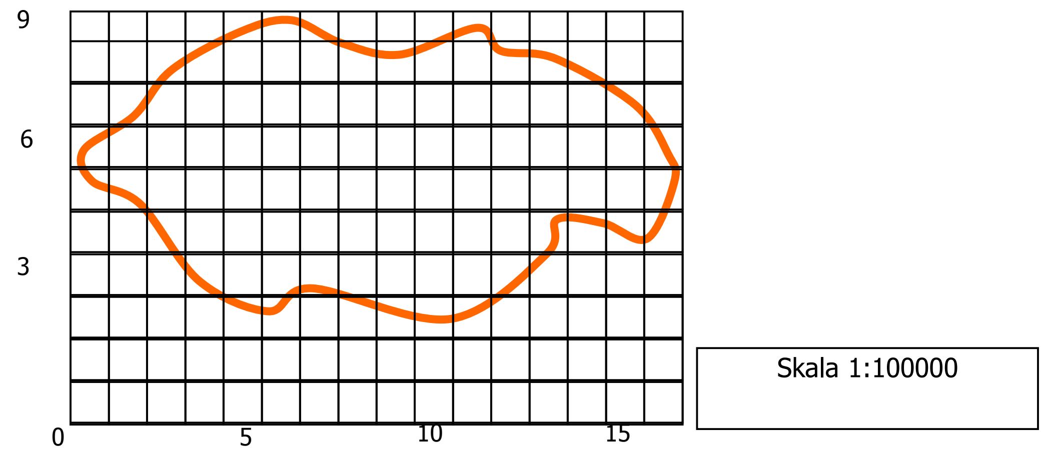
Metode Gauss n-Titik

Titik (n)	(k)	Bobot ($w_{n,k}$)	Absis ($x_{n,k}$)	Galat pemotongan
2	1	1.000000000	−0.577350269	$= f^{(4)}(\xi)$
	2	1.000000000	0.577350269	
3	1	0.555555556	−0.774596669	$= f^{(6)}(\xi)$
	2	0.888888889	0.000000000	
	3	0.555555556	0.774596669	
4	1	0.347854845	−0.861136312	$= f^{(8)}(\xi)$
	2	0.652145155	−0.339981044	
	3	0.652145155	0.339981044	
	4	0.347854845	0.861136312	
5	1	0.236926885	−0.906179846	$= f^{(10)}(\xi)$
	2	0.478628670	−0.538469310	
	3	0.568888889	0.000000000	
	4	0.478628670	0.538469310	
	5	0.236926885	0.906179846	

Beberapa Penerapan Integrasi Numerik

- **Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar**
- **Menghitung Luas dan Volume Benda Putar**

Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar



- Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak. Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera maka berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.
- Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini n=16). Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y(n)	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0

Menghitung Luas Daerah
Berdasarkan Gambar

- Dari tabel di atas, luas area dapat dihitung dengan menggunakan 3 macam metode:
- Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h\sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{15} y_i + y_{16} \right) = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{i=ganjil} y_i + 2\sum_{i=genap} y_i + y_{16} \right) = 74$$

Menghitung Luas dan Volume Benda Putar

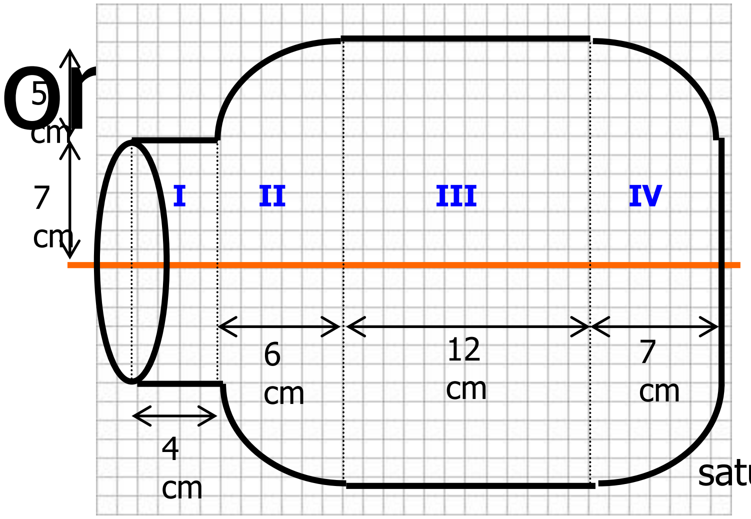
- Luas benda putar:

$$L_p = 2\pi \int_a^b f(x)dx$$

- Volume benda putar:

$$V_p = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Cor



satuan dalam cm

- Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian
  - bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya,
  - bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.
- Bagian I: $L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$ $V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$
- Bagian III: $L_{III} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$ $V_{III} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$

Contoh :

- Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil h=1 diperoleh:

n	0	1	2	3	4	5
y(n)	7	10	11	11.5	12	12

- Pada bagian II dan IV: $L_{II} = L_{IV}$ dan $V_{II} = V_{IV}$
- Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II}(L_{IV}) = 2\pi \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II}(= V_{IV}) = \pi \frac{h}{2}\left[y_0^2 + y_5^2 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$

Contoh :

- Luas permukaan dari botol adalah: $L = L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV}$

$$= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi$$
$$= 560\pi$$
$$= 1758.4$$

- Luas = 1758.4 cm2
- Volume botol adalah:

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV}$$
$$= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi$$
$$= 6024\pi$$

- Volume = 18924.78 cm3