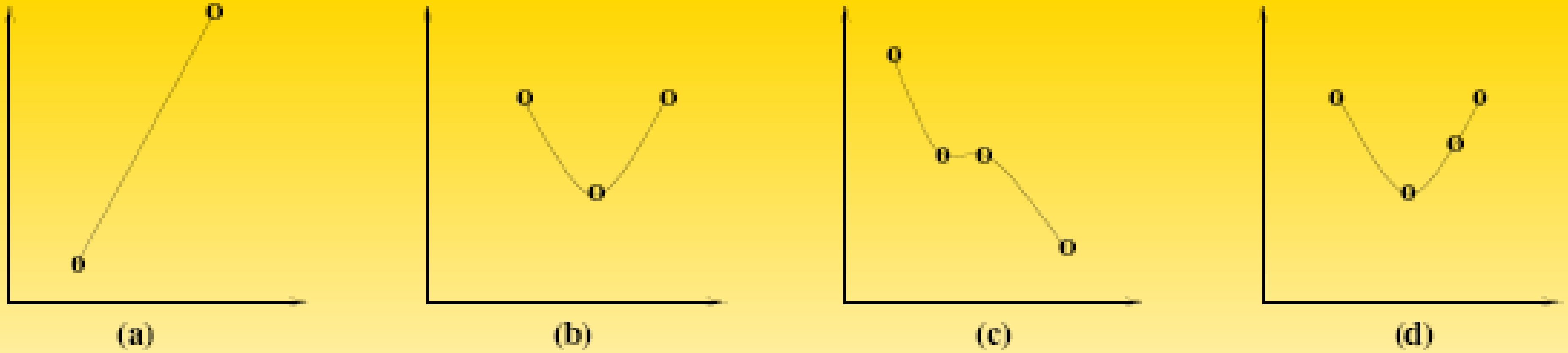
Interpolasi

Umi Sa'adah

Interpolasi

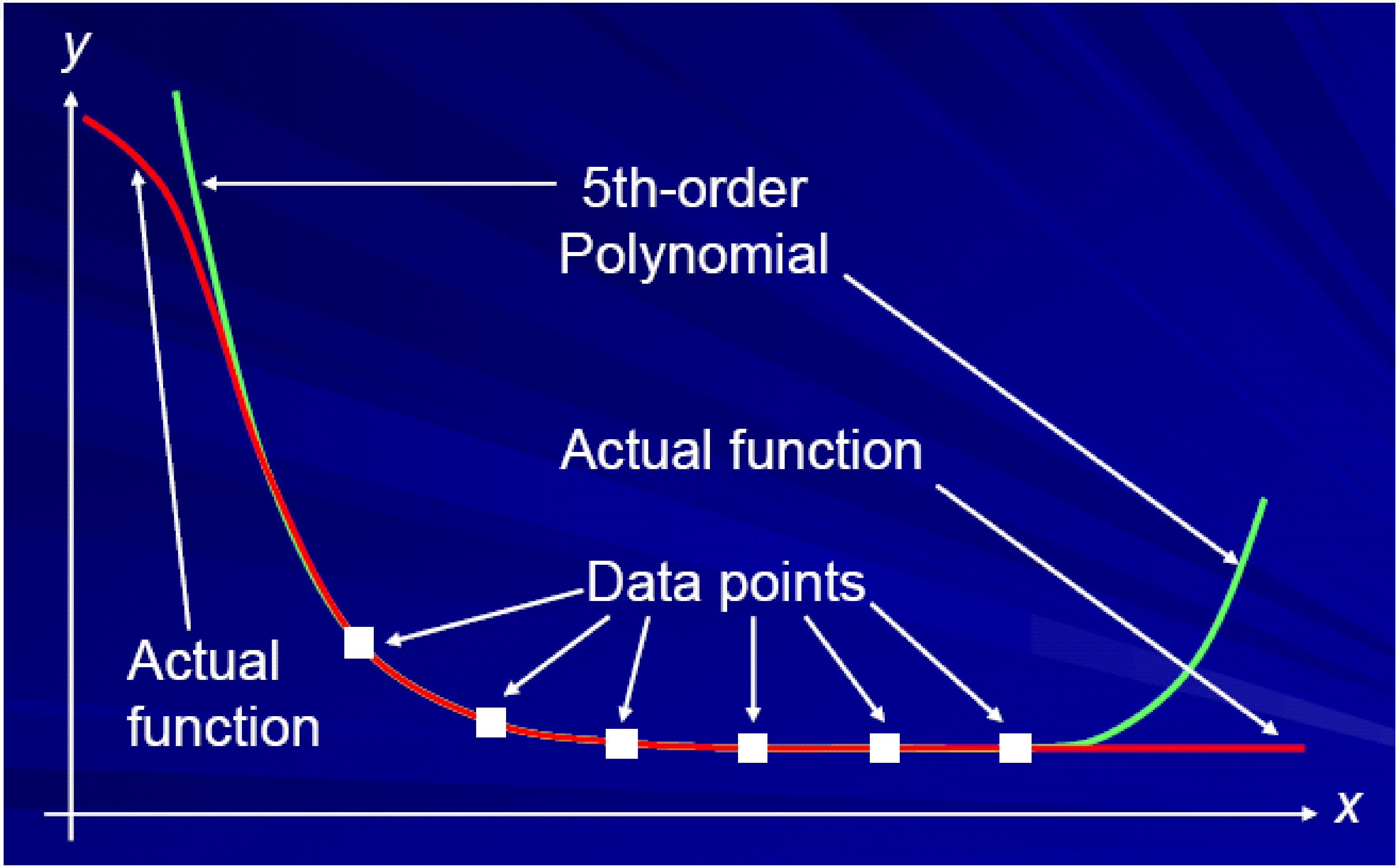
Andaikan kita memiliki tabulasi data yang terbebas dari kesalahan dan ingin menaksir harga(-harga) yang terletak *di antara titik-titik data* dalam tabel. Metode yang digunakan untuk maksud tersebut adalah *interpolasi*.

Untuk $(n+1)$ titik data, *ada satu dan hanya satu polinom* yang melewati semua titik data (derajat polinom n atau kurang dari n).

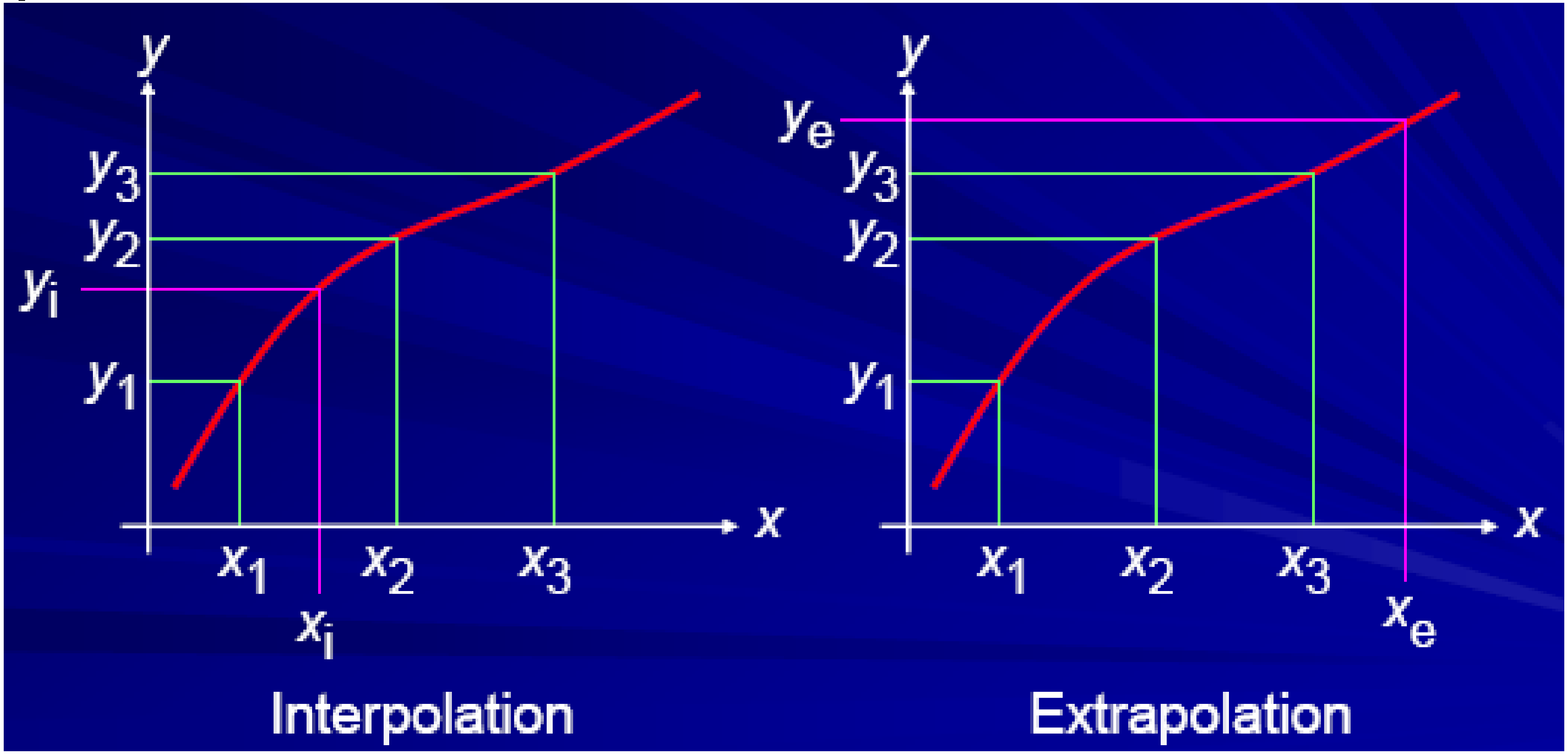


Interpolasi berbeda dengan ekstrapolasi, dimana yang kedua digunakan untuk menaksir

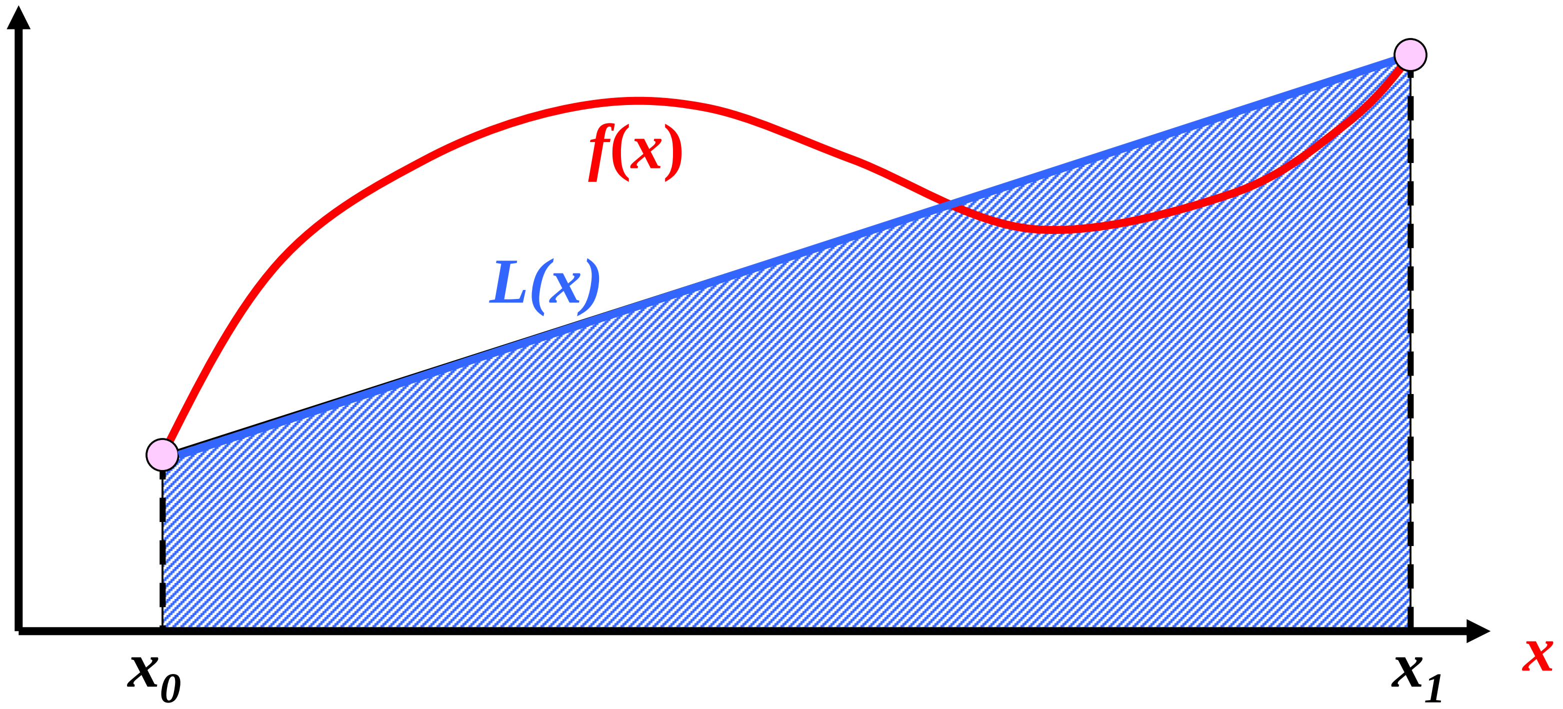
Interpolasi



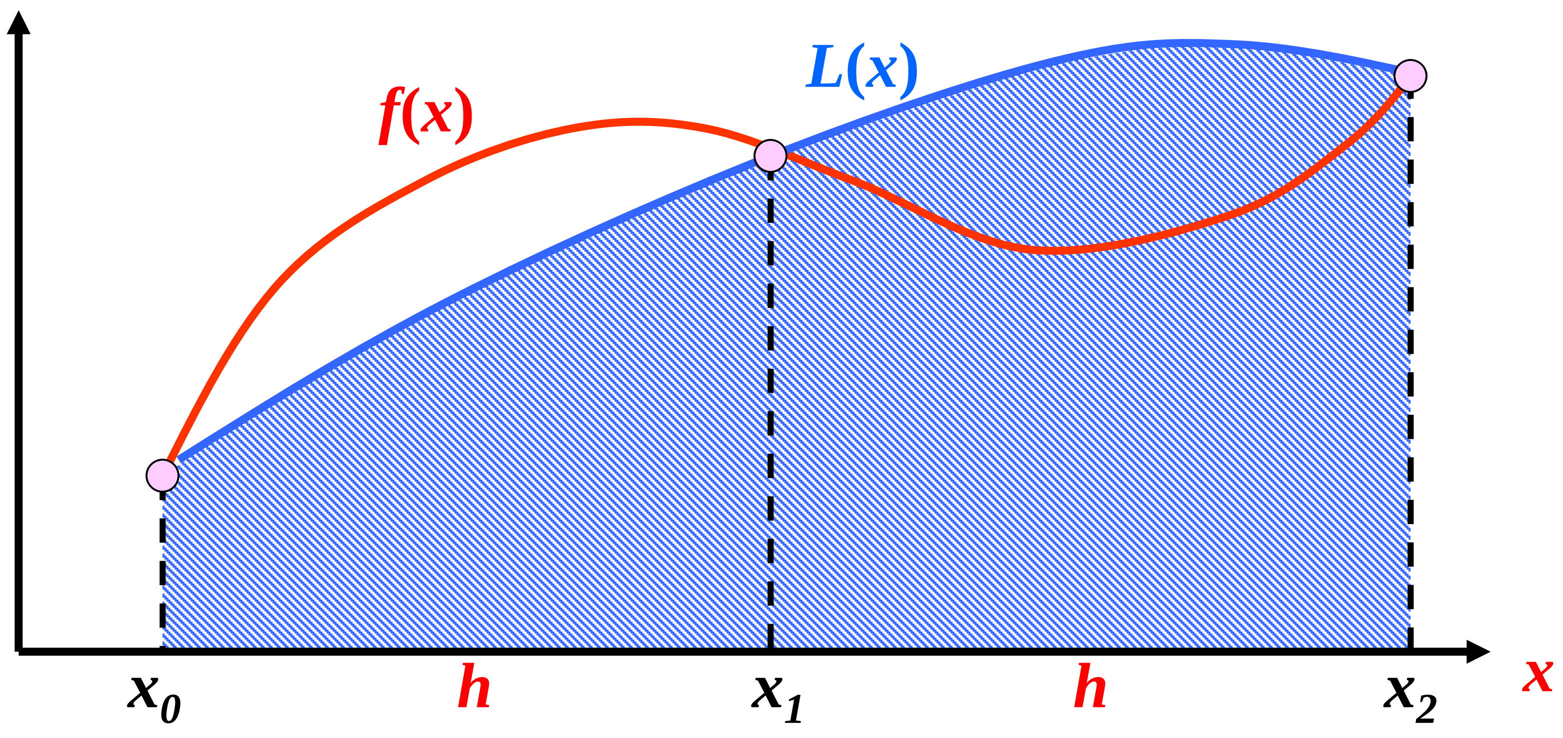
Perbedaan Interpolasi dan Ekstrapolasi



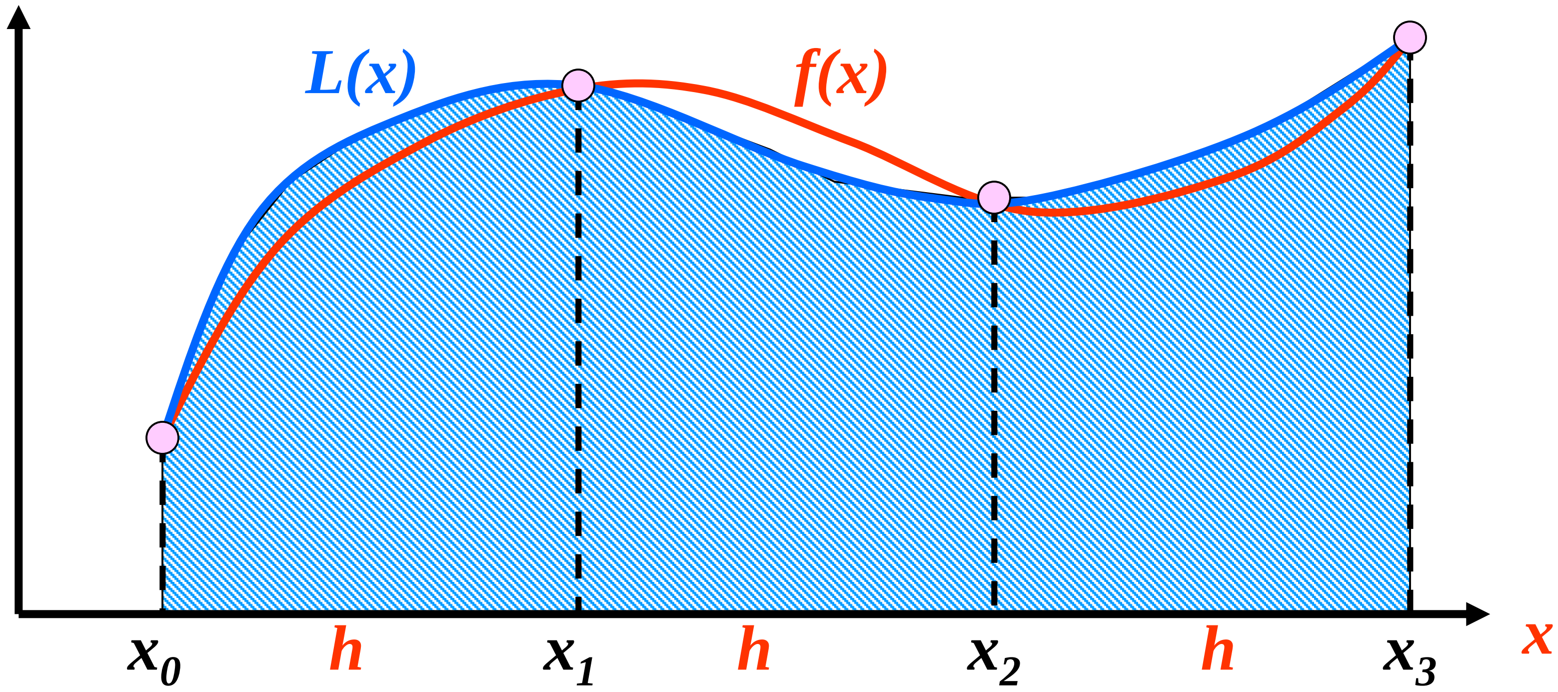
Interpolasi Linier



Interpolasi Kudrat



Interpolasi Qubic



Interpolasi dg Polinomial

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Table : Six equidistantly spaced points in [-1, 1]

x	$y = \frac{1}{1+25x^2}$
-1.0	0.038461
-0.6	0.1
-0.2	0.5
0.2	0.5
0.6	0.1
1.0	0.038461

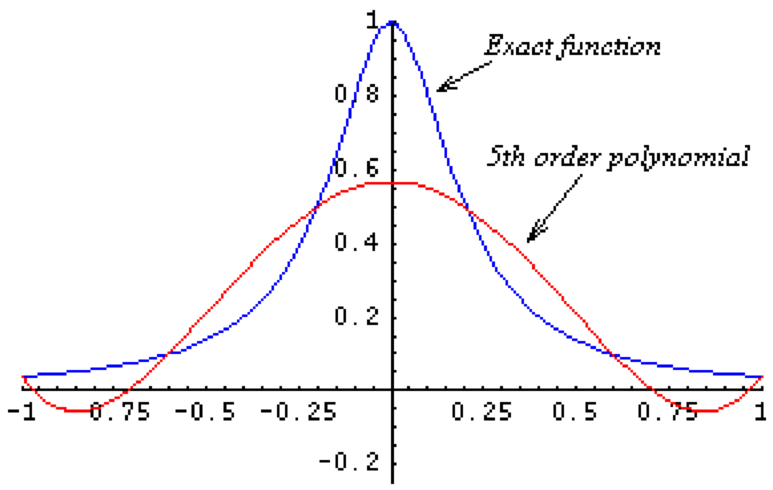


Figure : 5th order polynomial vs. exact function

Interpolasi dg Polinomial

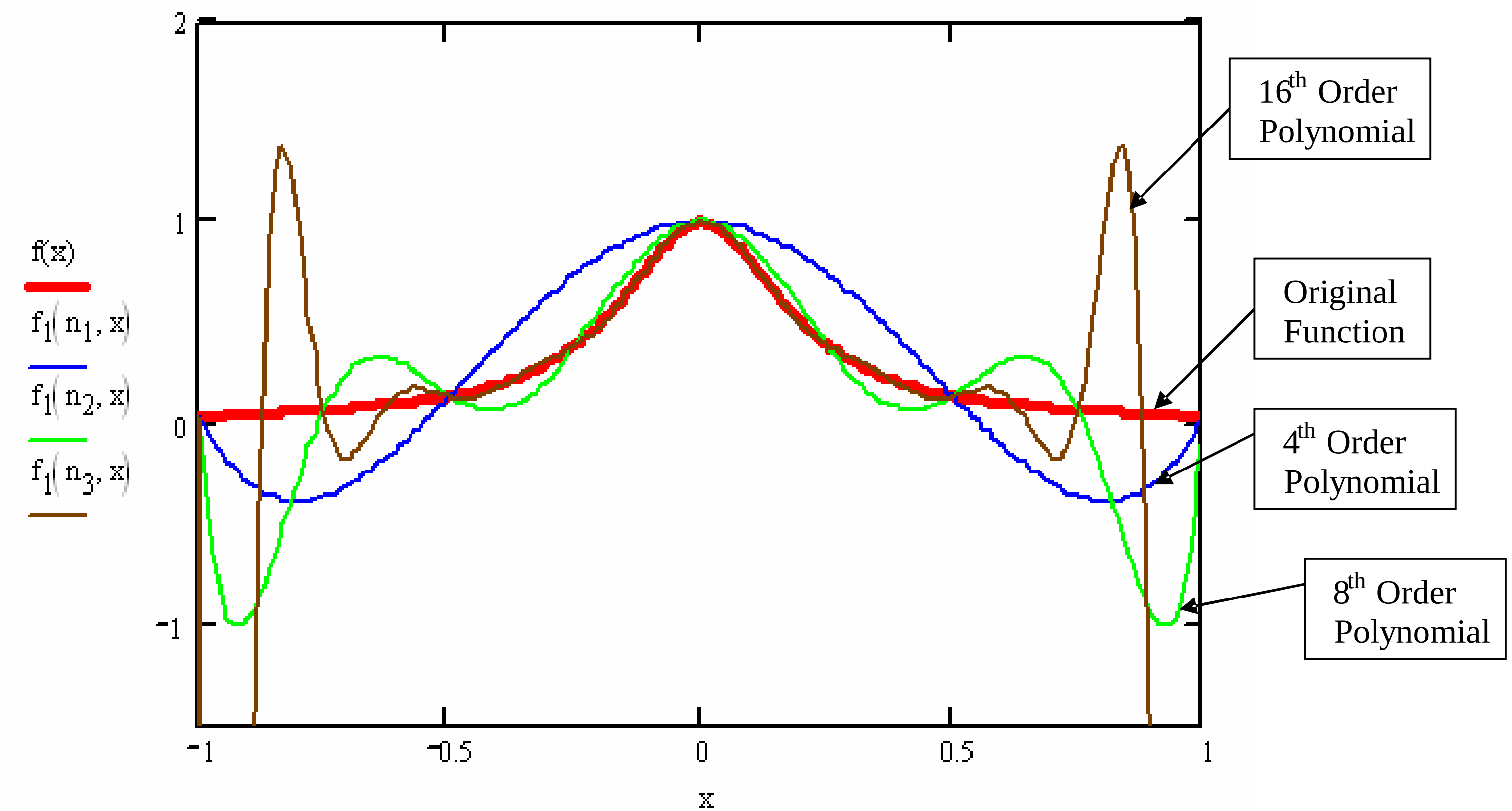
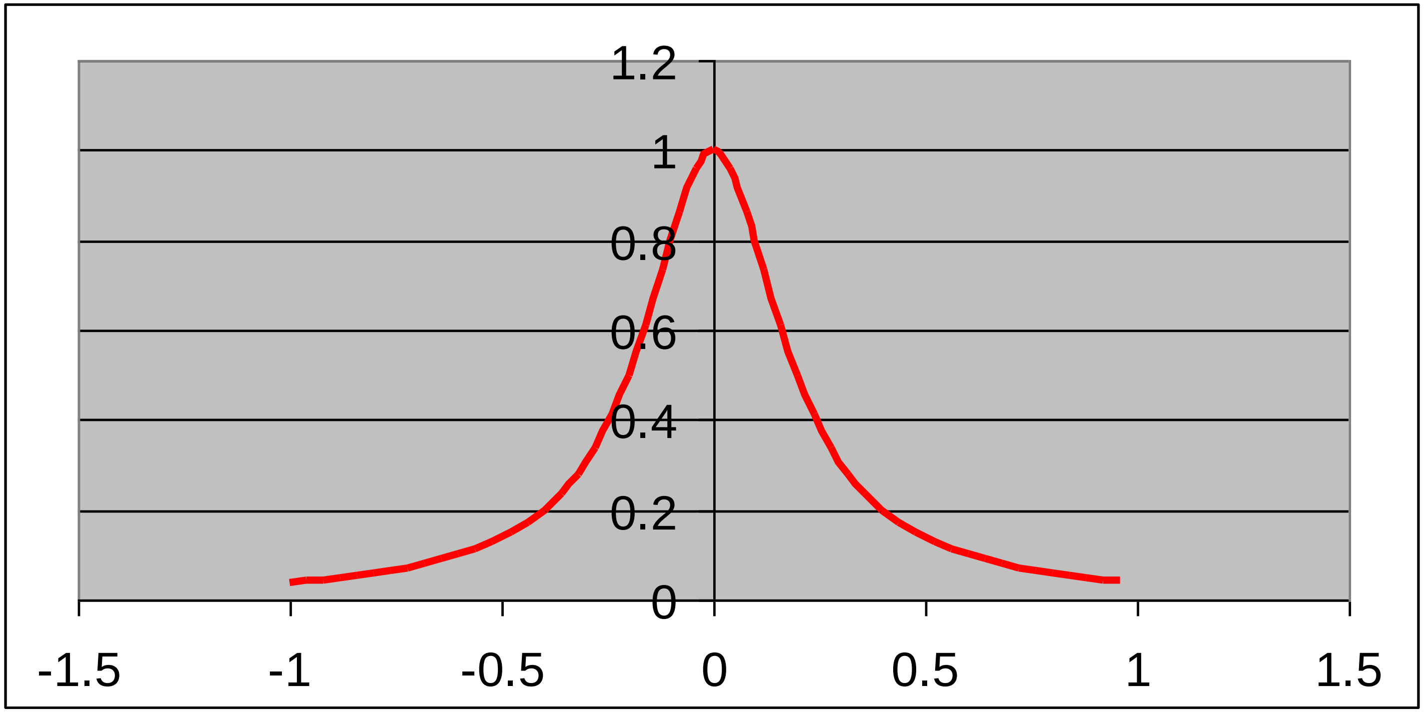


Figure : Higher order polynomial interpolation is a bad idea

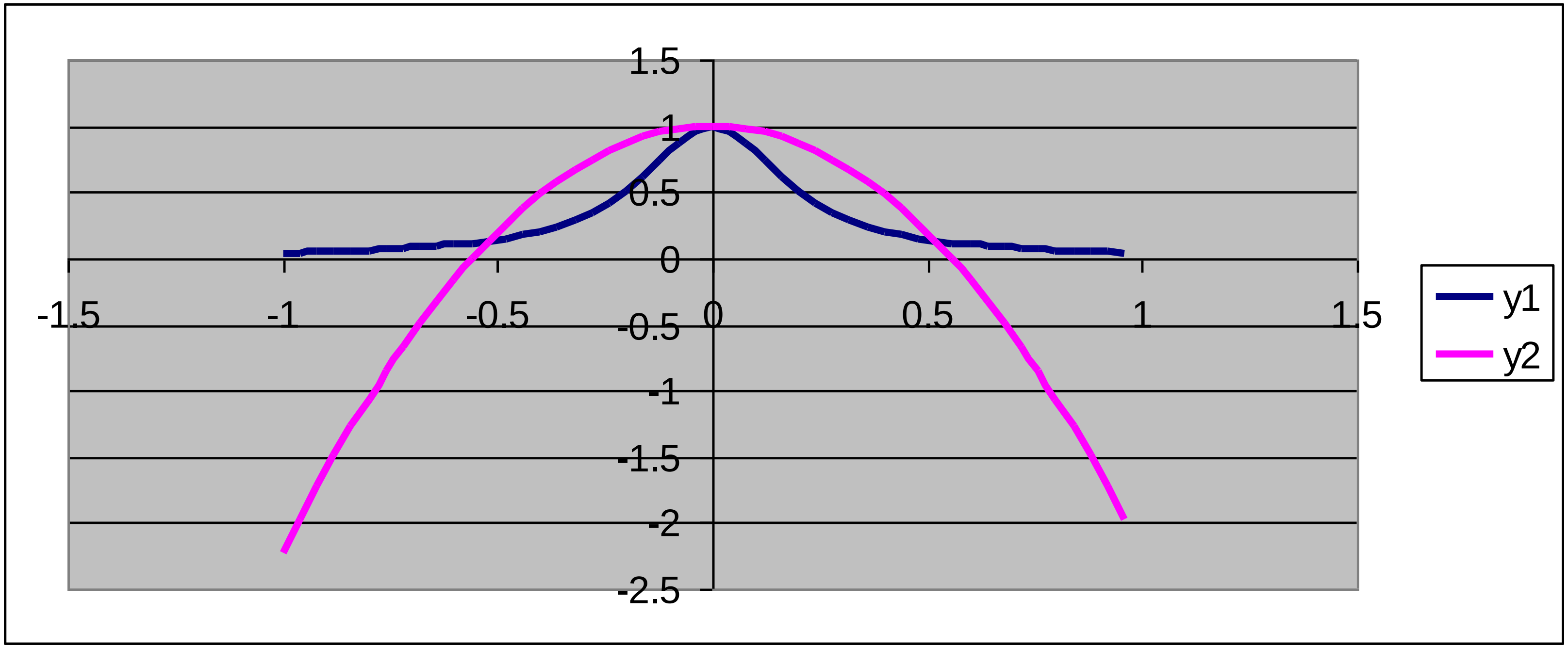
Uji Coba

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$



Interpolasi Kuadratik

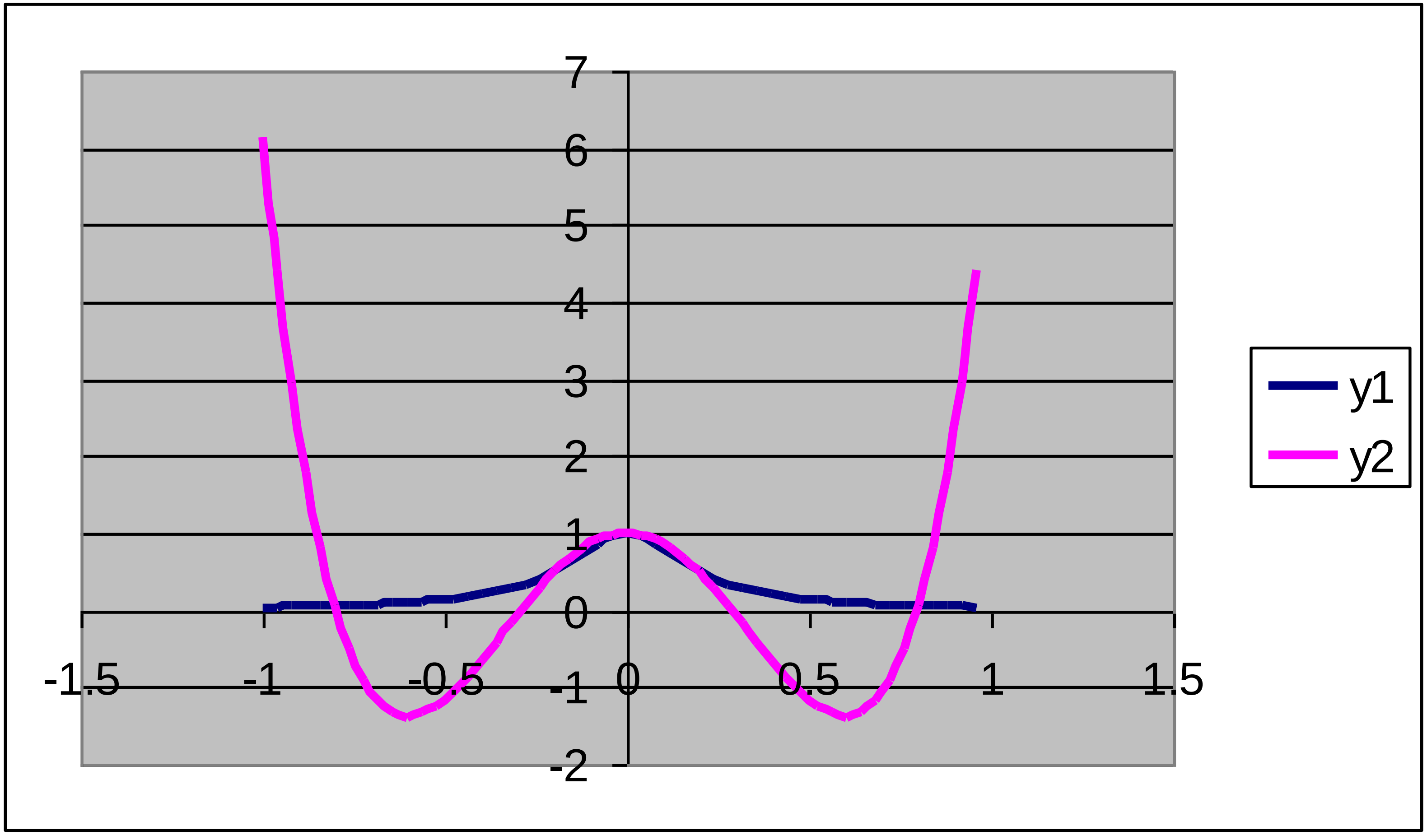
- Titik yang digunakan
  - -0.52   0.128866
  - 0.52   0.128866
  - 0   1
- $F(x) = -3.22165x^2 + 1$



Interpolasi Polinom derajat 4

- Titik yang digunakan
  - 0 1
  - 0.2 0.5
  - -0.2 0.5
  - 0.8 0.058824
  - -0.8 0.058824
- $F(x) = 18.3824x^4 - 13.2353x^2 + 1$

Interpolasi Polinom derajat 4

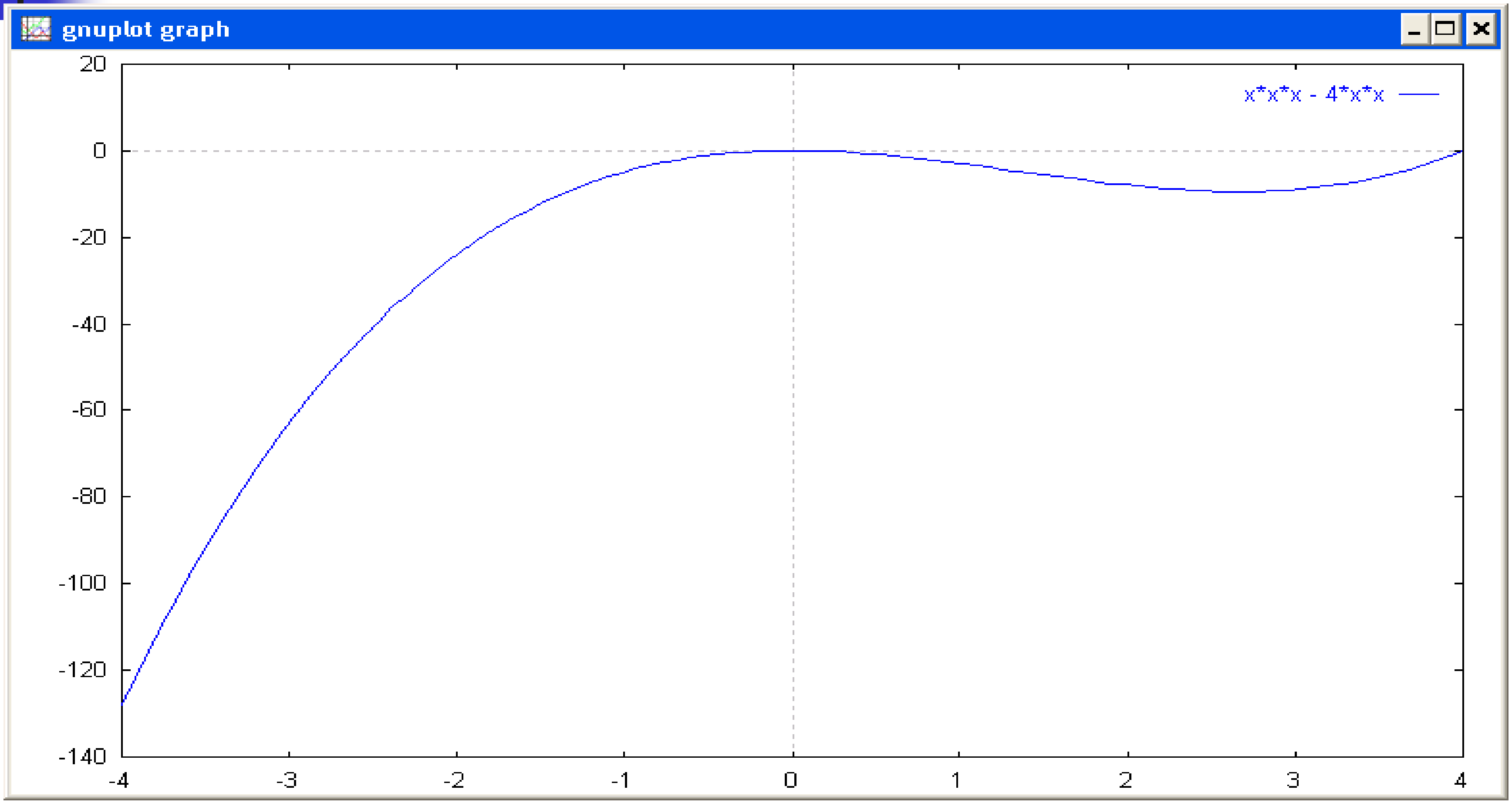


Contoh 2 :

Titik2 yang digunakan untuk menghitung interpolasi n = 3

(-3,-63) (3,-9)

(0,0) (-2,-24)

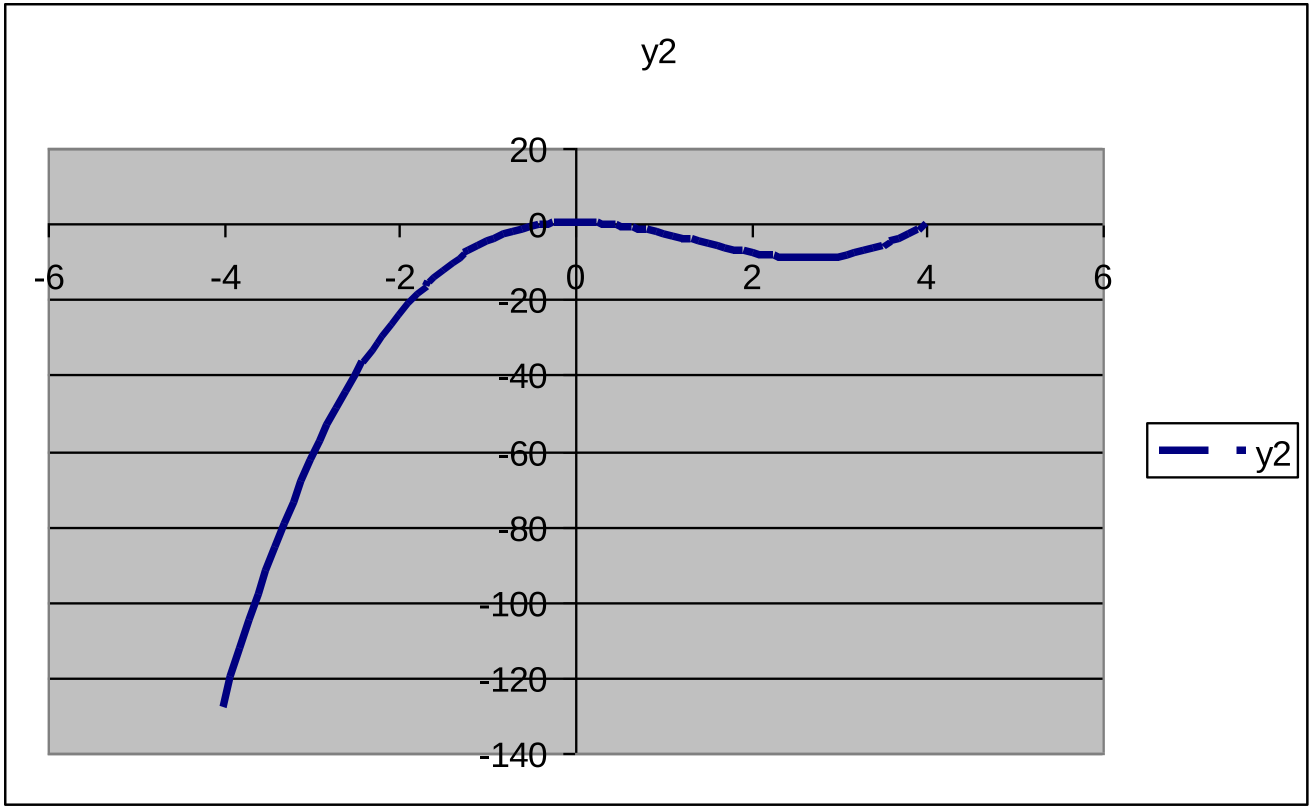


Contoh 2 :

(-3,-63) (3,-9)
(0,0) (-2,-24)

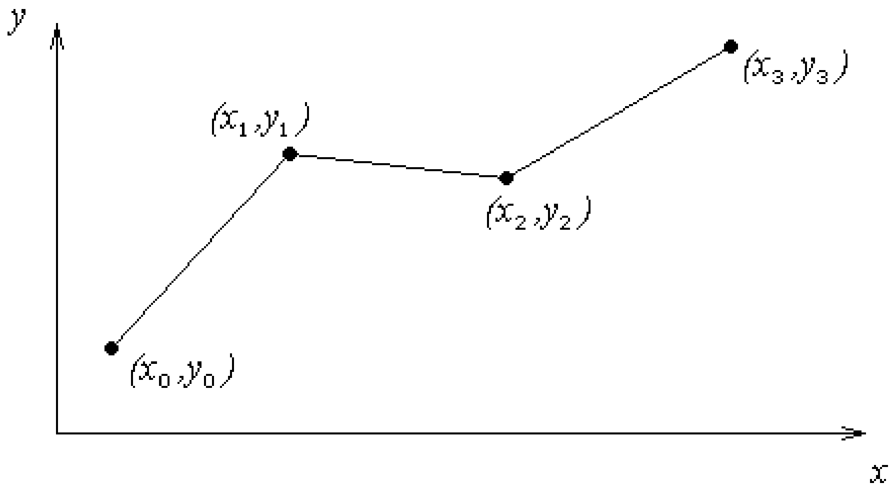
- Persamaan
  - -27a3 + 9a2 – 3a1 + a0 = -63
  - 27a3 + 9a2 + 3a1 + a0 = -9
  - -8a3 + 4a2 – 2a1 + a0 = -24
  - a0 = 0
- Didapatkan : a0=0, a1=1.59872e-15, a2=-4 dan a3 = 1
- Sehingga didapatkan pers sbb :
  - $X^3 - 4x^2 + 1.59872e\text{-}15X$

Hasil

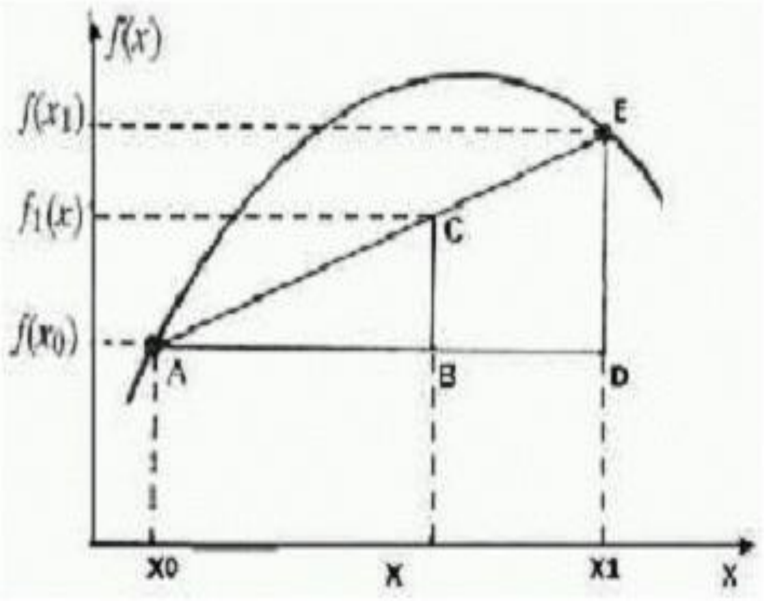


Interpolasi Linier

- ide dasar : pada saat data dalam bentuk tabel tidak begitu bervariasi, sehingga memungkinkan untuk dilakukan pendekatan dengan menggunakan sebuah garis lurus di antara dua titik yang berdekatan.



Interpolasi Linier



$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

atau $$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}$$

sehingga $$\boxed{f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}.(x - x_0)}$$

Interpolasi Linier

Polinom yang menginterpolasi 2 titik : $$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Didapat 2 persamaan sbb :
$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

Dengan proses eliminasi didapatkan :
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$a_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

Sehingga persamaan mjd : $$p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{x_1 - x_0}$$

Dengan sedikit manipulasi aljabar didapat :
$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Interpolasi Linier

$$p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = y_0 \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_0 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{x y_1 - x y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Sehingga, persamaan untuk interpolasi linier: $$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Contoh :

- Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

- Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kenderaan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

Contoh :

- maka untuk mencari nilai x=45 maka,

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

$$f(45) = 65 + \frac{25}{10}5 = 65 + 12.5 = 77.5\, feet$$

Example

The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 1. Find the velocity at t=16 seconds using linear splines.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Table : Velocity as a function of time

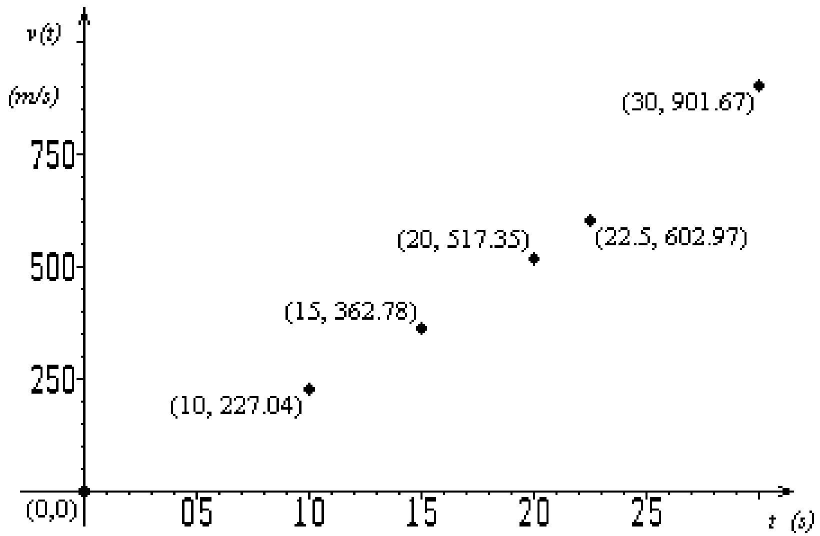


Figure : Velocity vs. time data for the rocket example

Linear Interpolation

$$t_0 = 15, \qquad v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \qquad v(t_1) = 517.35$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

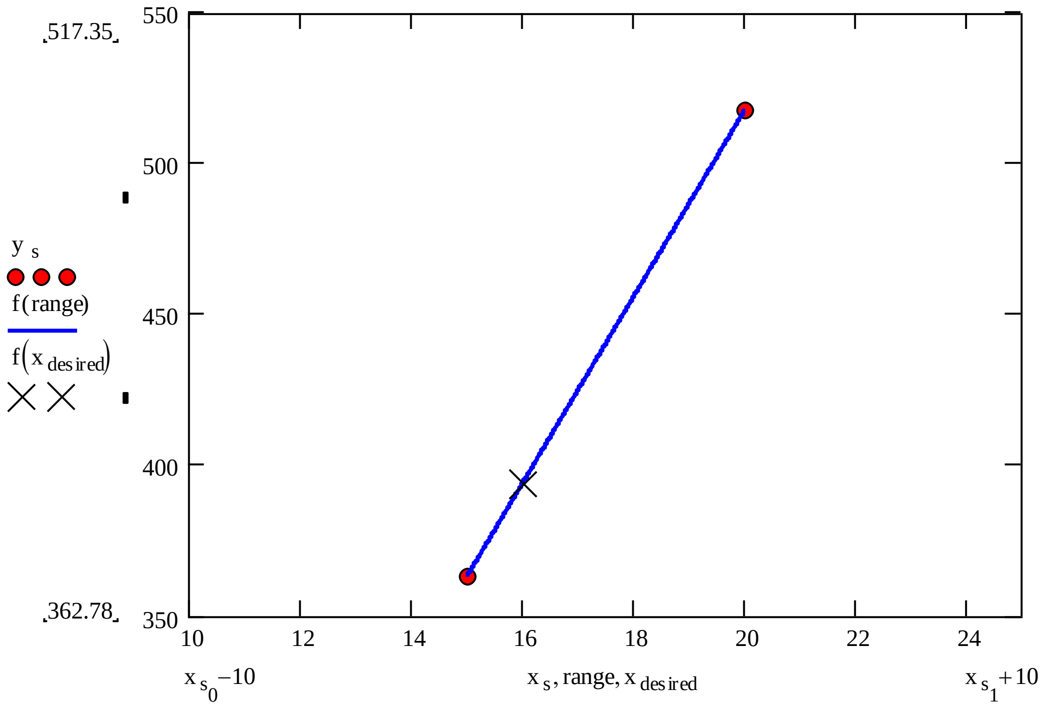
$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At $t = 16$,

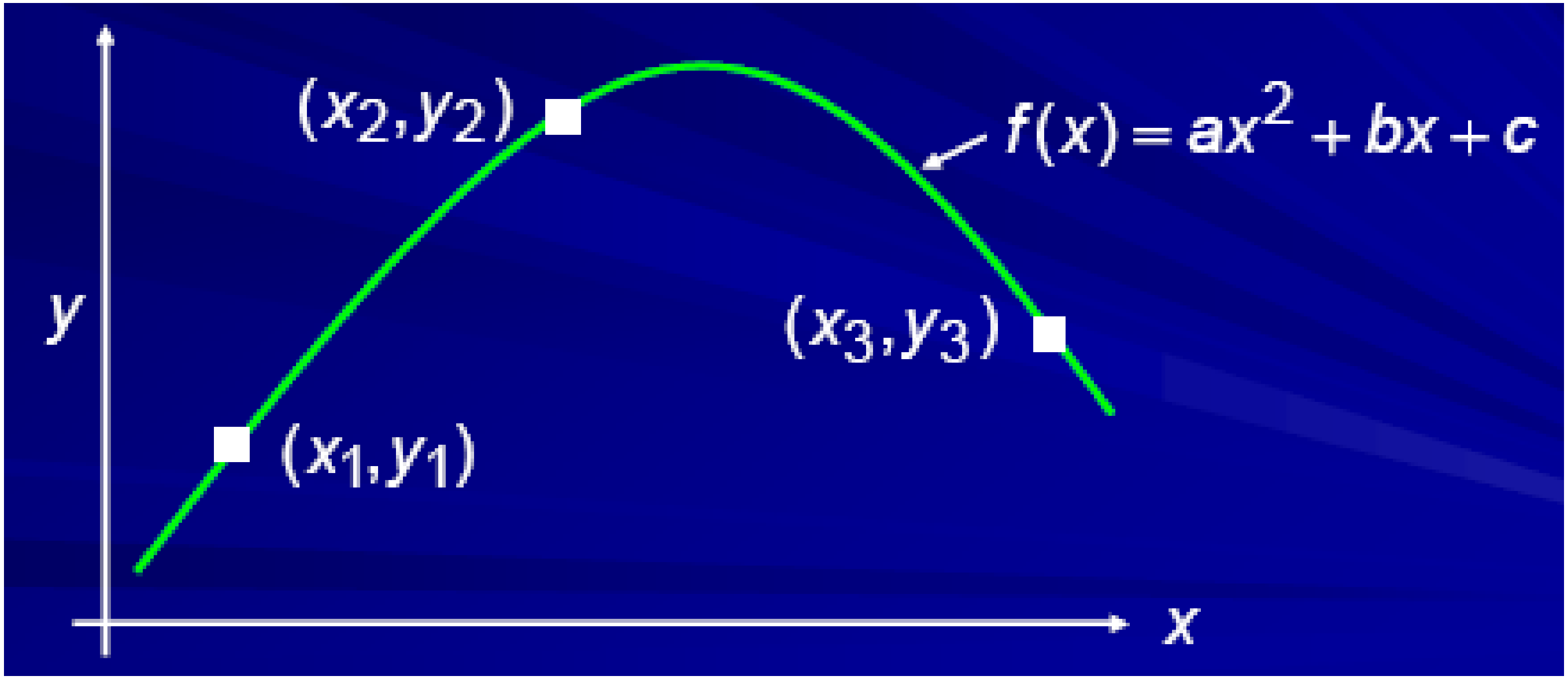
$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



Interpolasi Kuadrat

$F(x) = ax^2 + bx + c$



Interpolasi Kuadrat

- Titik-titik data (x_0,y_0) (x_1,y_1) (x_2,y_2)

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2$$

- Hitung a0, a1 dan a2 dari sistem persamaan tersebut dengan Metode Eliminasi Gauss

Interpolasi Kuadrat (Versi lain)

- Untuk memperoleh titik baru Q (x,y)

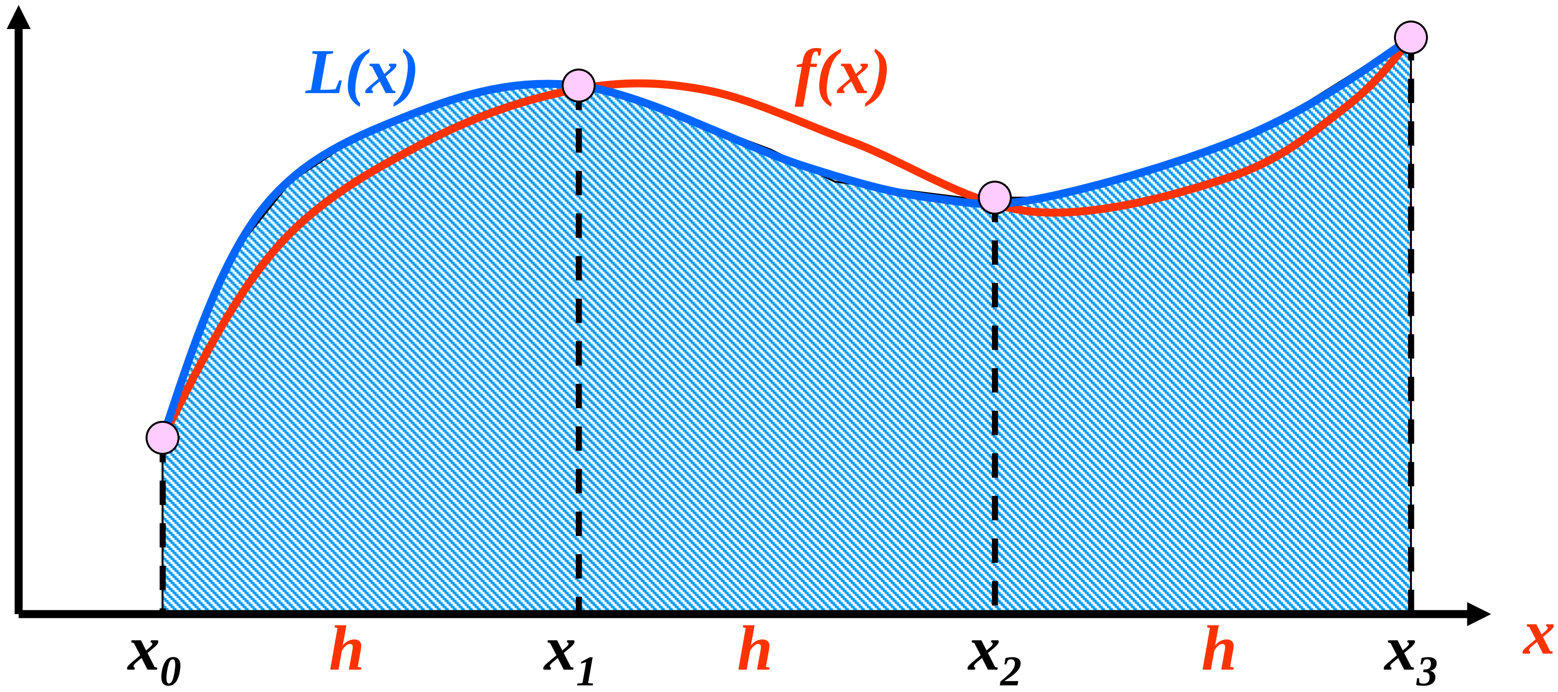
$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Contoh :

- Diberikan titik ln(8) = 2.0794, ln(9) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadrat

- Sistem Pers Linier yang terbentuk.
  - 64 a2 + 8 a1 + a0 = 2.0794
  - 81 a2 + 9 a1 + a0 = 2.1972
  - 90.25 a2 + 9.5 a1 + a0 = 2.2513
- Penyelesaian
  a2= -0.0064
  a1 = 0.2266
  a0 = 0.6762
- Jadi polinom kuadratnya = $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$
- Sehingga p2(9.2) = 2.2192

Interpolasi Qubic



Interpolasi Qubic

- Terdapat 4 titik data (x_0,y_0) (x_1,y_1) (x_2,y_2) dan (x_3,y_3)
- $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara
  - Masukan (x_i,y_i) ke dalam persamaan
    - $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$
    - $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$
    - $a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$
    - $a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$
  - Hitung a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3

Metode Lain

- Secara umum, penentuan polinomial dengan cara tsb kurang disukai, karena mempunyai kemungkinan yang jelek terutama untuk derajat polinomial yang semakin tinggi.
- Terdapat beberapa metode polinom interpolasi :
  - Polinom Lagrange
  - Polinom Newton
  - Polinom Newton Gregory

Polinom Lagrange

- Polinom berderajat satu $$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$
- Dapat diatur kembali sedemikian rupa sehingga menjadi
$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
- Atau dapat dinyatakan dalam bentuk (*)
$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$$
- Dimana $a_0 = y_0$ $a_1 = y_1$
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
- Persamaan * dinamakan Polinom Lagrange derajat 1.

Polinom Lagrange

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

$$= \frac{y_0(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} - \frac{y_0(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + \frac{y_1(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{y_0 x_1 - y_0 x_0 - y_0 x + y_0 x_0}{(x_1 - x_0)} + \frac{y_1(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{y_0 x_1 - y_0 x}{(x_1 - x_0)} \frac{-1}{-1} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{-y_0 x_1 + y_0 x}{(-x_1 + x_0)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Polinom Lagrange

- Bentuk umum Polinom Lagrange derajat ≤ n untuk (n+1) titik berbeda adalah :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \ldots + a_n L_n(x)$$

- Yang dalam hal ini $a_i = y_i$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Contoh :

- Hampiri fungsi f(x) = cos(x) dengan polinom interpolasi derajat tiga pada range [0.0, 1.2]. Gunakan empat titik
- $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 1.2$
- Perkirakan nilai p3(0.5) dan bandingkan dengan nilai sebenarnya.

X_i	0.0	0.4	0.8	1.2
y_i	1	0.921061	0.696707	0.362358

Contoh :

- Polinom Lagrange derajat 3 yang menginterpolasi keempat titik tsb.

$$p_3(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x)$$

$$p_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$p_3(X) = 1 \frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.0-0.4)(0.0-0.8)(0.0-1.2)} + 0.921061 \frac{(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.4-0.0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)} +$$

$$0.696707 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)}{(0.8-0.0)(0.8-0.4)(0.8-1.2)} + 0.362358 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}{(1.2-0.0)(1.2-0.4)(1.2-0.8)}$$

$$p_3(0.5) = 0.877221 \qquad y = \cos(0.5) = 0.877583$$

Polinom Newton

- Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena :
  - Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
  - Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Karena tidak ada hubungannya antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange
- Polinom Newton bisa mengatasi hal ini, di mana polinom yang dibentuk sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk polinom derajat yang lebih tinggi.

Polinom Newton

- Persamaan Polinom Linier $$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$
- Bentuk pers ini dapat ditulis : $$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$
- Yang dalam hal ini $$a_0 = y_0 = f(x_0) \qquad (1)$$
- Dan $$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \qquad (2)$$
- Persaman ini merupakan bentuk selish terbagi (divided-difference) $$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Polinom Newton

- Polinom kuadratik

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Polinom Newton

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Polinom Newton

- Nilai konstanta a_0, a_1, a_2,..., a_n, merupakan nilai selisih terbagi (ST) , dengan nilai

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f[x_1, x_0]$$
$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)}{x_n - x_0}$$

Polinom Newton

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	y_0	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	y_1	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	y_2	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	y_3			

Polinom Newton

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :
  - Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

  - basis $p_0(x) = f(x_0)$
- Atau dalam bentuk polinom yang lengkap sbb :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Contoh Soal :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri f(x)=cos(x) dalam range[0.0, 4] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah f(x) dengan x=2.5 dengan Polinom Newton derajat 3.

x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0.0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3.0	-0.99	0.3363			
4.0	-0.6536				

Contoh Soal :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

Contoh Soal :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan x_0 = 0 sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

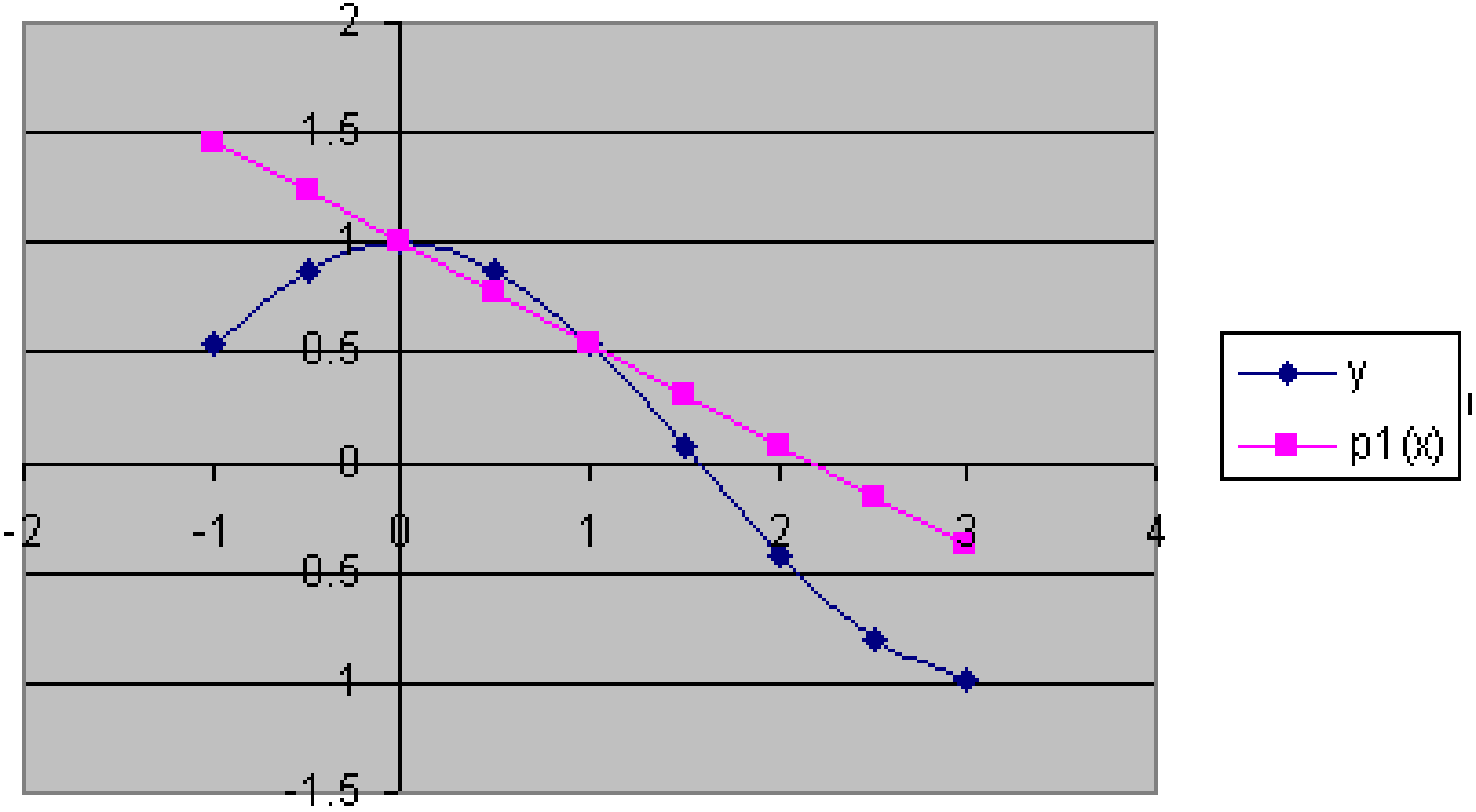
Contoh Soal :

- Nilai fungsi di x=2.5 dengan polinom derajat 3 adalah :

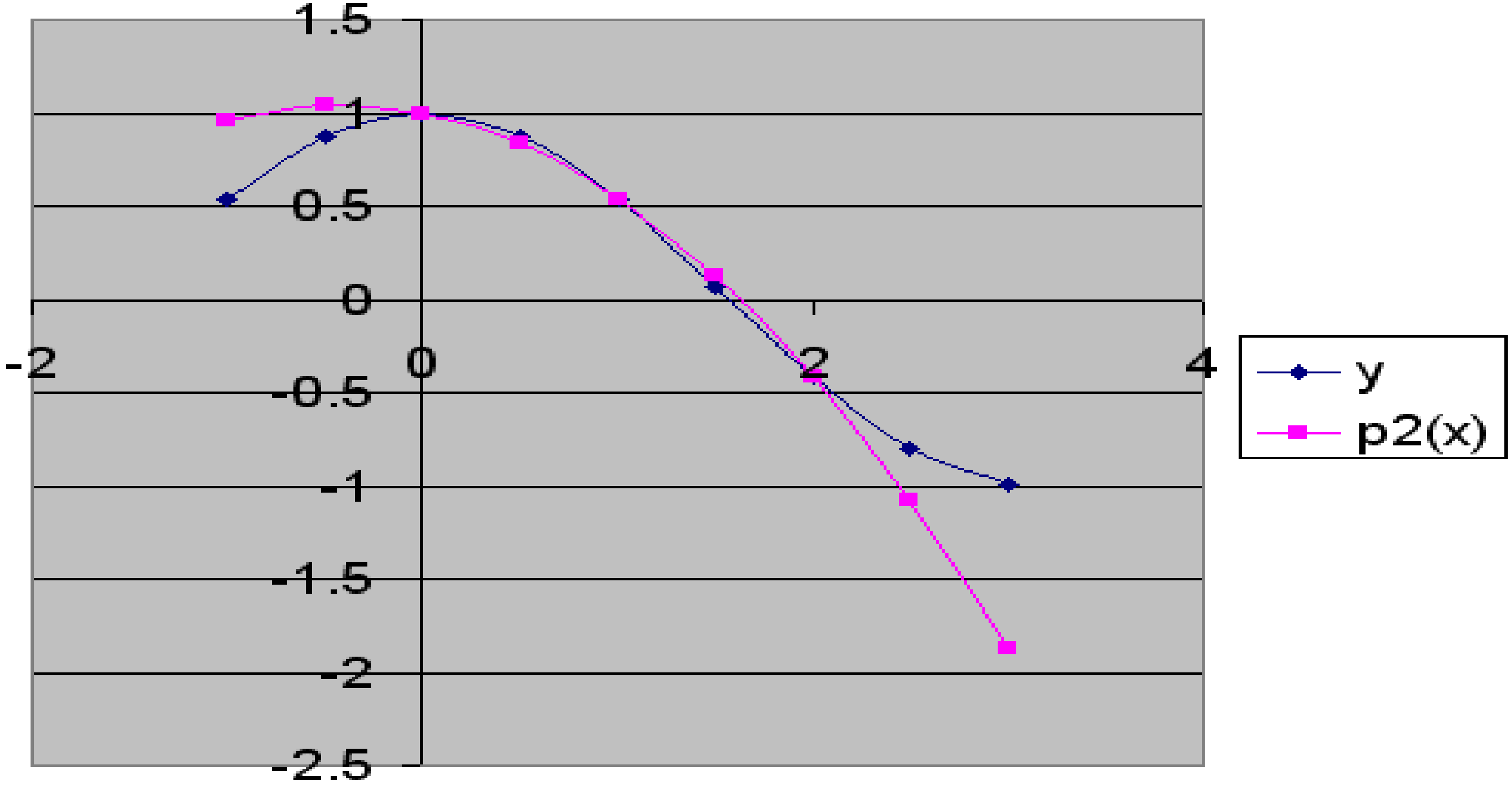
$$\cos(2.5) \approx p_3(2.5) = 1.0 - 0.4597(2.5 - 0.0) - 0.2484(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0) +$$
$$0.1466(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0)(2.5 - 2.0) = -0.8056$$

- Nilai sejati f(2.5) adalah
  - f(2.5) = cos(2.5)=-0.8011
- Jadi solusi hampiran mengandung error =
  - -0.8011 – (-0.8056) = 0.0045

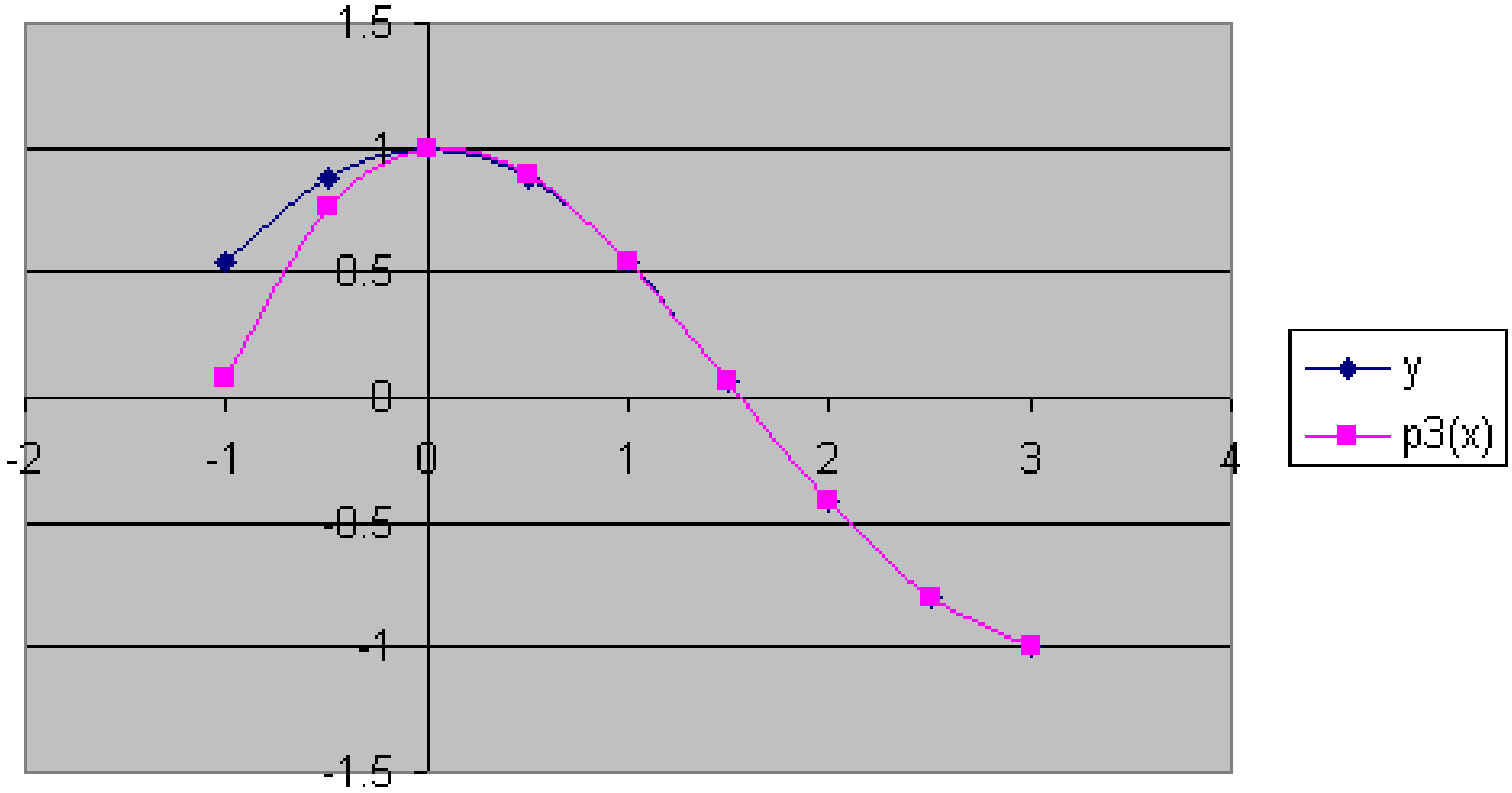
Grafik f(x) vs p_1(x)



Grafik f(x) vs $p_2(x)$



Grafik f(x) vs $p_3(x)$



Grafik f(x) vs $p_4(x)$