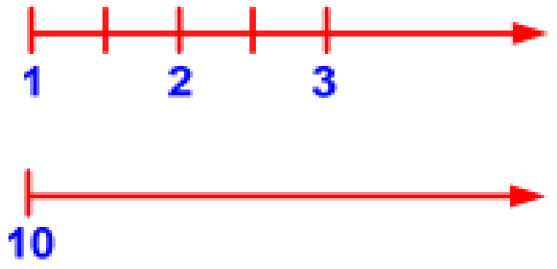
Distribusi Peluang Kontinyu

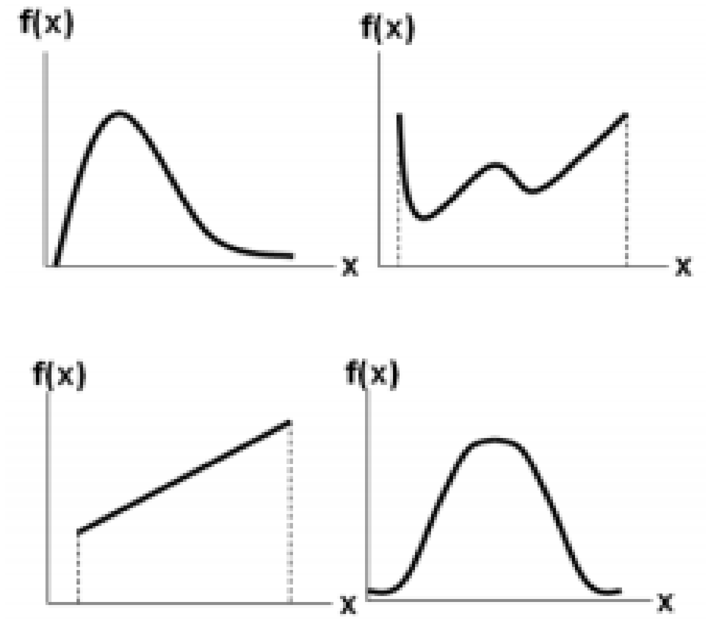
STATISTIK

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

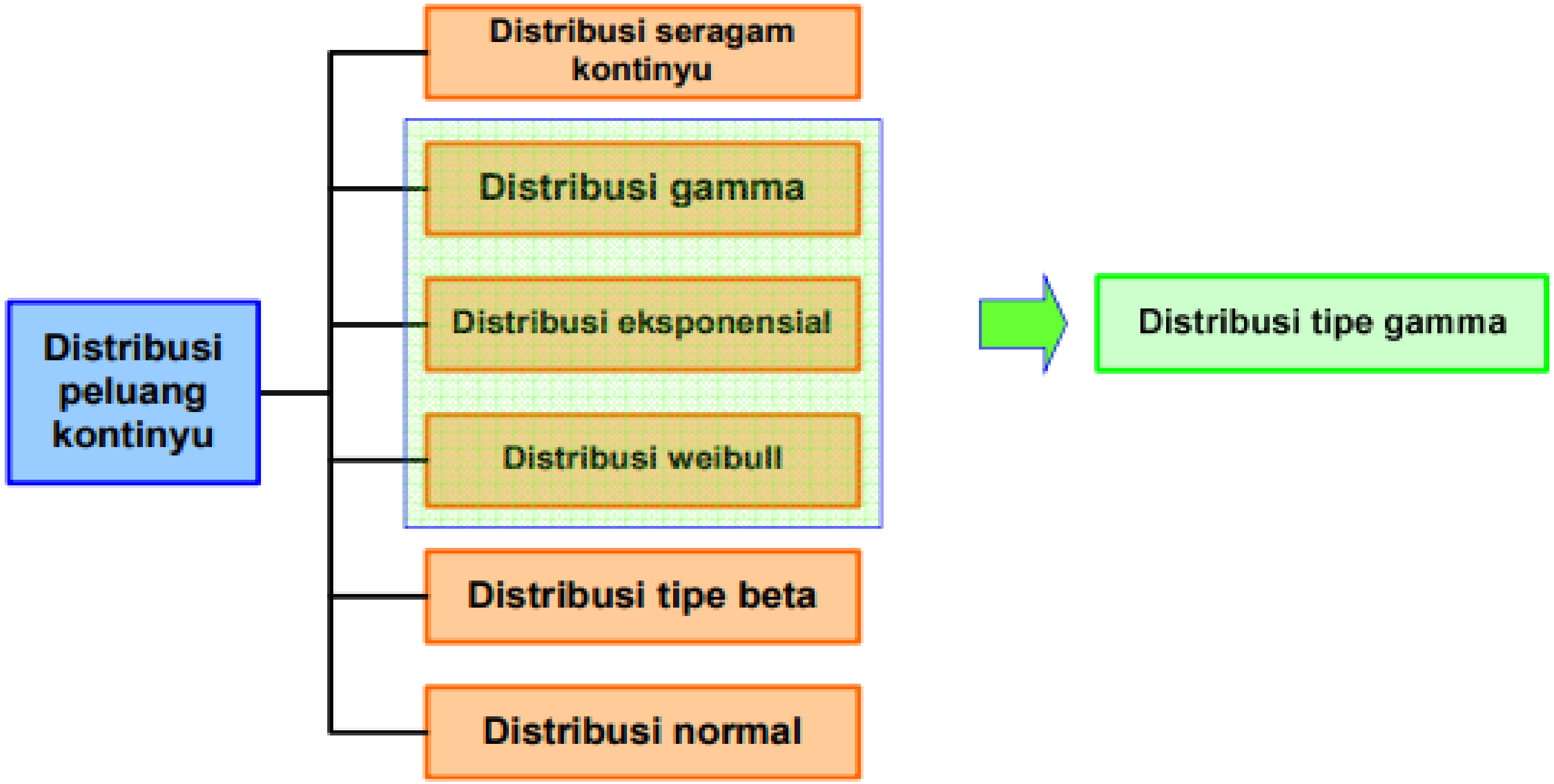
Berbeda dengan variabel *random* diskrit, sebuah variabel *random* kontinyu adalah variabel yang dapat mencakup nilai pecahan maupun mencakup *range*/ rentang nilai tertentu.



Karena terdapat bilangan pecahan yang jumlahnya tidak terbatas, kita tidak dapat menuliskan semua nilai yang mungkin bersama dengan probabilitasnya masing - masing dalam bentuk tabel. Namun dipakai fungsi kepadatan probabilitas *(Probability Density Function : pdf)*. Plot untuk fungsi seperti ini disebut kurva probabilitas dan nilai probabilitasnya dinyatakan sebagai luas suatu kurva yang bernilai positif.



DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU



DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

Distribusi seragam kontinyu

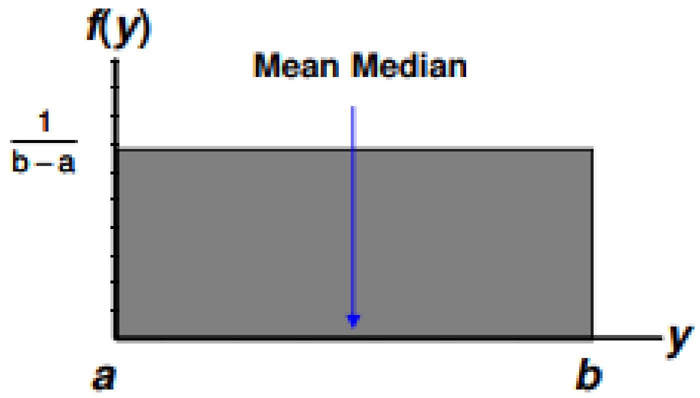
a. Ciri – ciri :

1. Variabel random seragam Y = salah satu nilai dalam interval $a \le y \le b$
2. Setiap Y memiliki nilai peluang seragam dalam selang $a \le y \le b$

b. Diberikan oleh :

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{, jika y bernilai } a \le y \le b \\ 0 & \text{, jika y bernilai lainnya} \end{cases}$$

c. $\mu = \dfrac{a+b}{2}$ dan $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

STUDI KASUS 1

Sebuah mesin roll menghasilkan lembaran baja dengan ketebalan berkisar antara $150 \le y \le 200$. Tentukan fungsi distribusi peluang, rata – rata, dan variansi dari ketebalan baja jika dianggap menganut distribusi seragam.

SOLUSI :

$$f(y) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{200-150} = \frac{1}{50}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{150+200}{2} = 175$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(200-150)^2}{12} = \frac{25}{6}$$

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

Distribusi normal

Distribusi normal disebut juga *"Gaussian Distribution"* (sesuai dengan nama penemunya Carl Gauss).

Diantara sekian banyak distribusi, distribusi normal merupakan distribusi yang secara luas banyak digunakan dalam berbagai penerapan. Distribusi normal merupakan distribusi kontinyu yang mensyaratkan variabel yang diukur harus kontinyu miaslnya tinggi badan, berat badan, skor IQ, jumlah curah hujan, isi botol coca cola, hasil ujian, dll.

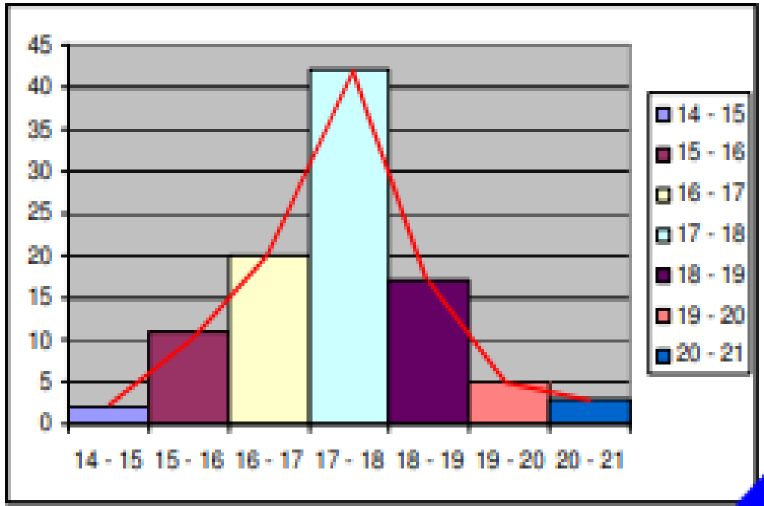
Contoh :

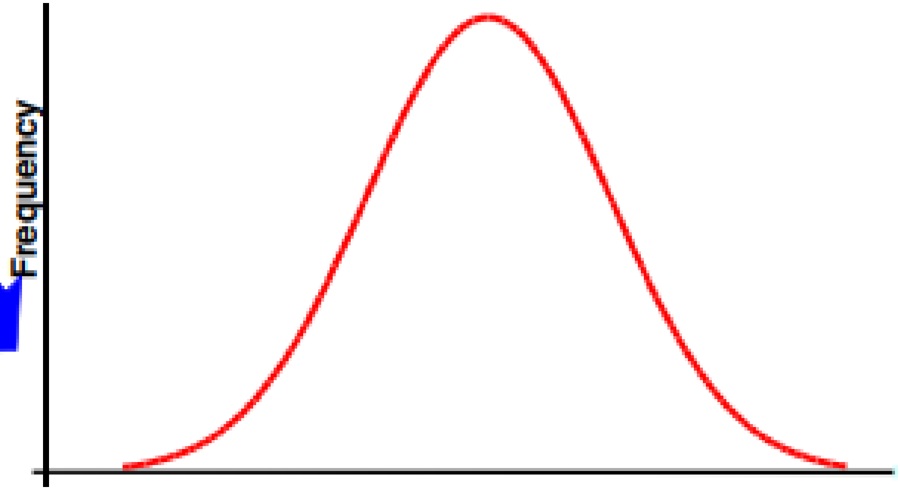
- Dari 100 orang sampel yang diambil secara acak, setiap orang diminta untuk mengerjakan suatui tugas tertentu. Hasil pengamatan terhadap waktu yang mereka gunakan untuk menyelesaikan tugas tersebut disajikan dalam tabel berikut :

waktu (detik)	frekuensi	frekuensi relatif
14 - 15	2	0.02
15 - 16	11	0.11
16 - 17	20	0.2
17 - 18	42	0.42
18 - 19	17	0.17
19 - 20	5	0.05
20 - 21	3	0.03
	100	1

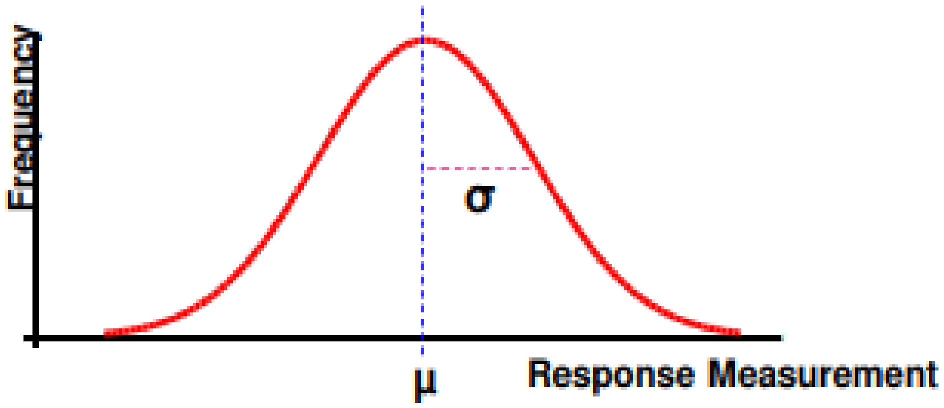
DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

Misalkan percobaan tersebut diulang kembali, kali ini jumlah sampel yang digunakan adalah 5000 orang. Lalu histogram frekuensi relatifnya dibuat dengan lebar kelas yang dibuat kecil (sehingga jumlah kelas menjadi banyak). Maka histogram tersebut akan terdiri atas kotak persegi panjang yang ramping dalam jumlah yang banyak. Dengan semakin banyaknya sampel yang diambil dan lebar interval kelas yang kecil, maka histogram frekuensi relatif yang dihasilkan akan semakin mendekati bentuk kurva normal.





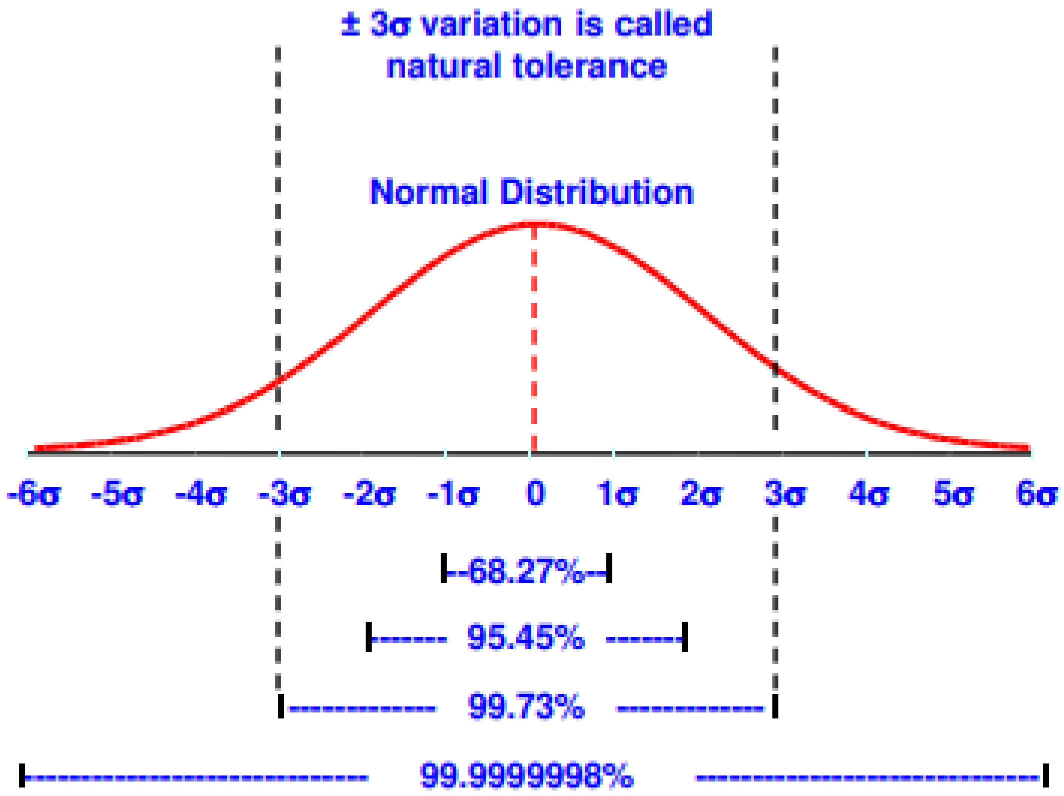
DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU



Ciri - ciri :

1. Kurva berbentuk garis lengkung yang halus dan menyerupai genta/ lonceng ;
2. Kedua ekor/ ujungnya semakin mendekati sumbu absisnya tetapi tidak pernah memotong ;
3. Distribusi normal memiliki dua parameter, yaitu μ dan σ yang masing - masing menentukan lokasi dan bentuk distribusi ;
4. Titik tertinggi kurva normal berada pada rata - rata ;
5. Distribusi normal adalah distribusi yang simetris ;
6. Simpangan baku (standar deviasi = σ), menentukan lebarnya kurva. Makin kecil σ, maka bentuk kurva makin runcing ;
7. Total luas daerah dibawah kurva normal adalah 1 ;
8. Jika jarak dari masing - masing nilai X diukur dengan σ, maka kira - kira 68% berjarak 1σ, 95% berjarak 2σ, dan 99% berjarak 3σ.

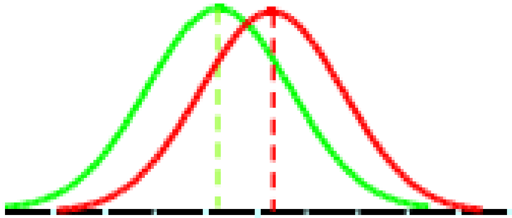
DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU



DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

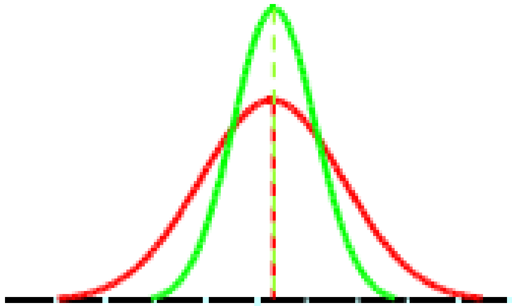
Persamaan matematika bagi distribusi probabilitas acak normal tergantung pada dua parameter, yaitu μ dan σ. Bila kedua nilai tersebut diketahui, maka kita dapat menggambarkan kurva normal tersebut dengan pasti.

ILUSTRASI :



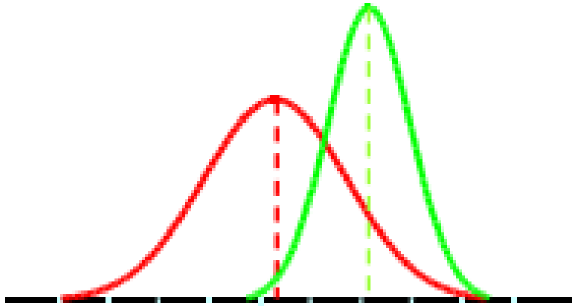
Distributions differs in location

$\mu_1 \neq \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$



Distributions differs in spread

$\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$

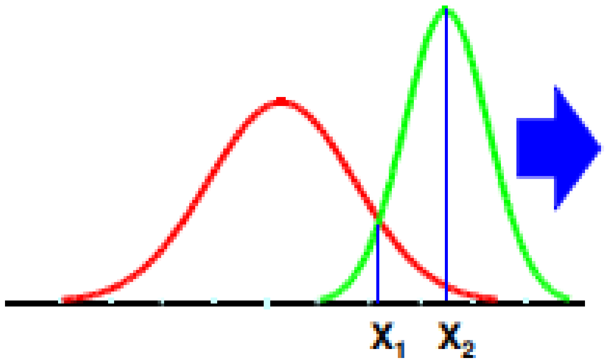


Distributions differs in spread and location

$\mu_1 \neq \mu_2$ dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

Karena persamaan kurva normal tergantung pada nilai - nilai μ dan σ, maka kita akan memiliki bermacam - macam bentuk kurva.



Luas daerah pada rentang x1 dan x2 berbeda antara kurva 1 dan 2, hal ini membuktikan bahwa luas daerah dibawah kurva sangat dipengaruhi oleh μ dan σ

Adalah suatu hal yang sia – sia untuk membuat tabel yang berbeda pada setiap kurva normal yang dengan μ dan σ yang berbeda. Oleh karena itu dikembangkan suatu cara untuk mentransformasikan setiap hasil pengamatan yang berasal dari sembarang variabel acak normal x menjadi variabel acak normal z dengan $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$.

Nilai Z *(standard units)* = angka yang menunjukkan penyimpangan suatu variabel acak X dari *mean* (μ) dihitung dalam satuan standar deviasi (σ).

$$\text{rumus } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Untuk mengetahui berbagai luas dibawah lengkungan kurva normal standar sudah tersedia tabel luas kurva normal standar.

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

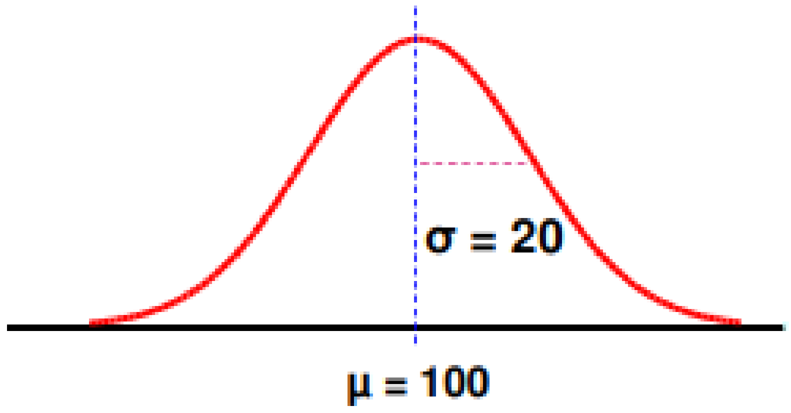
STUDI KASUS 2

Misalkan dimiliki kurva normal dengan μ = 100 dan σ = 20. Hitunglah :

a. Luas kurva normal antara 100 - 125 atau $P(100 \leq x \leq 125)$

b. Luas kurva normal antara 80 - 100 atau $P(80 \leq x \leq 100)$

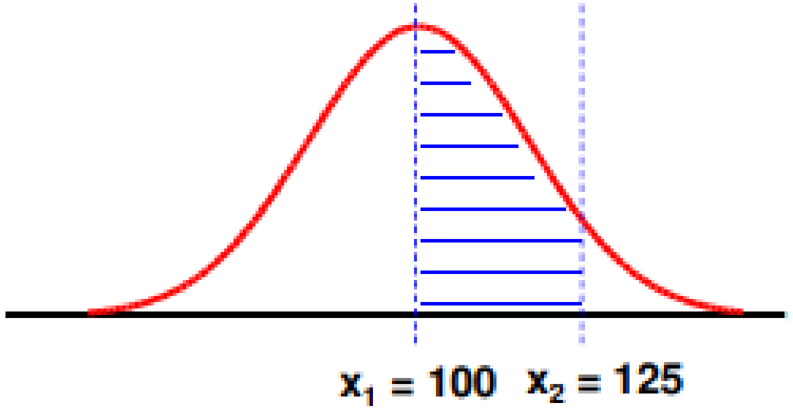
c. Luas kurva normal antara 75 - 120 atau $P(75 \leq x \leq 120)$



DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

JAWAB

a.



$$z_1 = \frac{100 - 100}{20} = \frac{0}{20} = 0$$ → Menurut tabel luasnya = 0,5000

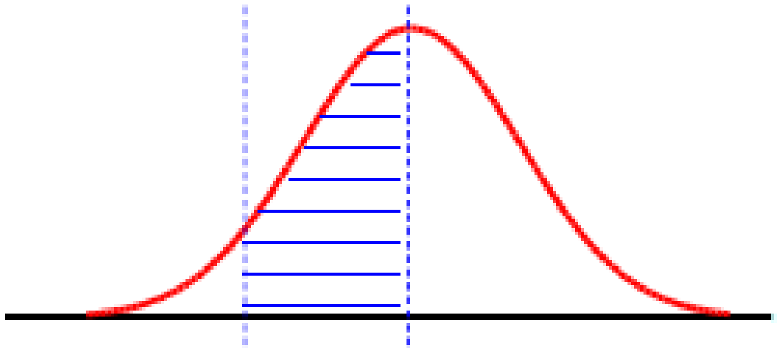
$$z_2 = \frac{125 - 100}{20} = \frac{25}{20} = 1{,}25$$ → Menurut tabel luasnya = 0,8944

MAKA, Luas kurva normal antara 100 – 125 = 0,8944 – 0,5000 = 0,3944

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

JAWAB

b.



$$z_1 = \frac{80 - 100}{20} = \frac{-20}{20} = -1$$ → Menurut tabel luasnya = 0,1587

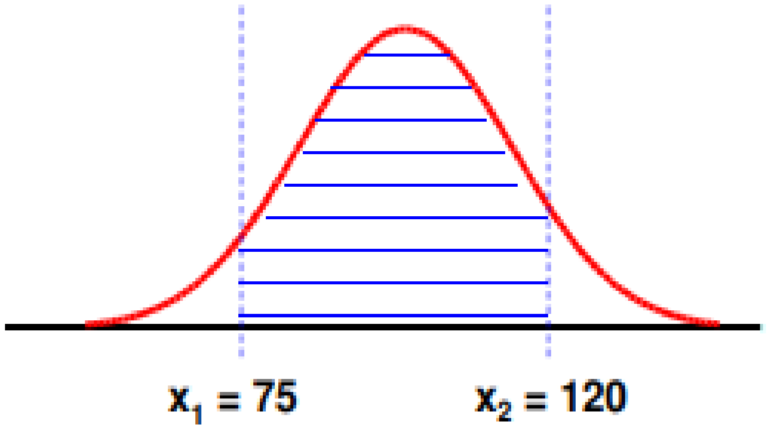
$$z_2 = \frac{100 - 100}{20} = \frac{0}{20} = 0$$ → Menurut tabel luasnya = 0,5000

MAKA, Luas kurva normal antara 80 – 100 = 0,5000 – 0,1587 = 0,3413

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

JAWAB

c.



$$z_1 = \frac{75 - 100}{20} = \frac{-25}{20} = -1{,}25$$ → **Menurut tabel luasnya = 0,1056**

$$z_2 = \frac{120 - 100}{20} = \frac{20}{20} = 1$$ → **Menurut tabel luasnya = 0,8413**

MAKA, Luas kurva normal antara 75 – 120 = 0,8413 – 0,1056 = 0,7357

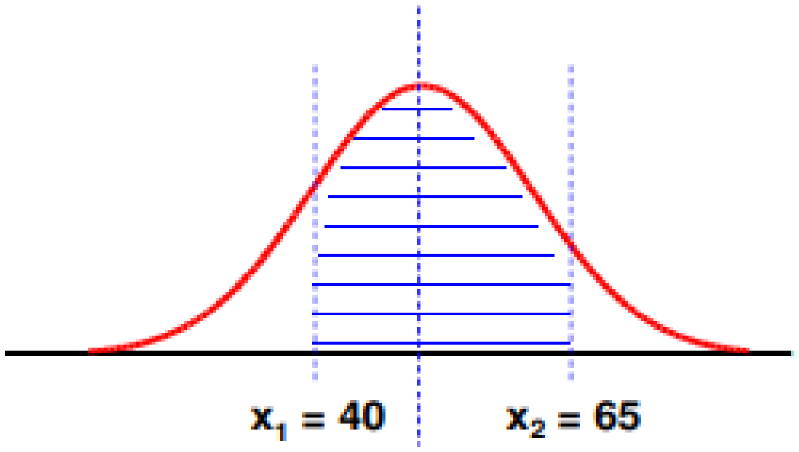
DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

STUDI KASUS 3

Misalnya seorang sarjana teknik mesin menyelidiki hasil panenan padi untuk merancang sebuah mesin perontok padi. Dari 300 orang petani di suatu daerah diketahui hasil panenan rata - rata sebesar 50 kwintal dengan deviasi standar sebesar 10 kwintal. Peneliti tersebut telah mengecek distribusi hasil panenan dan dinyatakan memiliki distribusi normal. Tentukan probabilitas hasil panenan berkisar antara 40 sampai 65 kwintal !

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

JAWAB



$$z_1 = \frac{40 - 50}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$ → Menurut tabel luasnya = 0,1587

$$z_2 = \frac{65 - 50}{10} = \frac{15}{10} = 1,5$$ → Menurut tabel luasnya = 0,9332

MAKA, Luas kurva normal antara 40 – 65 = 0,9332 – 0,1587 = 0,7745

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

Distribusi eksponensial

a. Ciri – ciri :

Jika suatu peristiwa terjadi dalam konteks proses poisson, maka panjangnya waktu atau ruang antar dua peristiwa yang berurutan mengikuti distribusi probabilitas kontinyu. Karena waktu atau ruang bersifat kontinu, pengukuran seperti itu menghasilkan variabel random kontinu.

Distribusi eksponensial sering disebut sebagai distribusi waktu. Peristiwanya sangat erat dengan peristiwa pada distribusi poisson.

MISAL : dalam suatu antrian kapal yang berlabuh disuatu dermaga, jumlah kedatangan kapal mengikuti distribusi poisson, sedangkan waktu antara kedatangan kapal mengikuti distribusi eksponensial.

b. Fungsi kerapatan eksponensial diberikan oleh :

$$f(T_1) = \lambda\, e^{-\lambda t}$$

T_1 = waktu kejadian yang pertama dalam proses poisson, dan disebut waktu ulang atau waktu antara dua kejadian yang berurutan, karena kejadian sukses independen dari waktu ke waktu.

λ = rata – rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran

c. Rata – rata T_1 diberikan oleh :

$$\mu(T_1) = \frac{1}{\lambda}$$

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

d. Fungsi distribusi T_1 dapat dicari dengan menggunakan persamaan :

$$F(T_1) = P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

X_t dalam distribusi poisson berarti jumlah kejadian sukses dalam interval t, sementara T_1 menyatakan waktu sampai terjadinya sukses. Maka bila diketahui $T_1 > t$, artinya dalam waktu tersebut tidak ada kejadian sukses. Sehingga fungsi distribusinya dirumuskan dengan :

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

STUDI KASUS 4

Dari arsip mengenai gempa di suatu tempat selama periode tahun 1836 – 1961 diketahui terjadi 16 gempa yang berskala intensitas VI atau lebih. Jika gempa dengan intensitas tinggi tersebut diasumsikan mengikuti distribusi poisson. Tentukan :

a. Berapa peluang bahwa gempa – gempa setinggi ini akan terjadi lagi 2 tahun mendatang ?

b. Berapa peluang tidak akan terjadi gempa dengan intensitas setinggi ini dalam 10 tahun mendatang ?

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

JAWAB :

a. Peluang gempa akan terjadi lagi dalam 2 tahun mendatang alah P (T1 ≤ 2)

$$P\ (T_1 \le 2) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{16}{1961 - 1836} = 0{,}128 \text{ gempa per tahun}$$

$$P\ (T_1 \le 2) = 1 - e^{(-0{,}128).(2)} = 0{,}226$$

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

b. **Peluang tidak akan terjadi gempa dalam 10 tahun mendatang adalah P(T1 > 10).**

$$P\,(T_1 > 10) = 1 - P(T \le 10)$$

$$= 1 - (1 - e^{(-0{,}128)(10)}) = e^{(-0{,}128)(10)} = 0{,}278$$